Натисніть тут, щоб

купити книгу на сайті

або

замовляйте по телефону:

(0352) 28-74-89, 51-11-41

(067) 350-18-70

(066) 727-17-62

Боднар Д.І., Возняк О.Г., Буяк Л.М.

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

У трьох частинах

Частина 3

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.16 я73
УДК 517.9
Б81

Рецензенти:
Доктор фіз-мат. наук, професор, завідувач кафедри економіко-математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
Григорків В. С.
Доктор фіз-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, директор Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету "Львівська політехніка"
Каленюк П. І.
Доктор фіз-мат. наук, професор завідувач кафедри математичних методів в інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя
Кривень В.А.

Рекомендовано Вченою радою Тернопільського національного економічного університету
(протокол №6 від 17 грудня 2014 року)

Боднар Д. І

Б81 Практикум з математичного аналізу. У 3-х частинах. Частина ІІІ. Диференціальні рівняння. Навчальний посібник / Боднар Д. І., Возняк О. Г., Буяк Л.М. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. — 176 с.

ISBN 978-966-10-4227-7

Дане видання містить короткі теоретичні відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем, елементи теорії стійкості, приклади розв'язування завдань та задачі для самостійного розв'язування.

Для студентів вищих навчальних закладів.

ББК 22.16 я73

Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва

ISBN 978-966-10-4227-7 © Навчальна книга – Богдан, 2015

ПЕРЕДМОВА

Якість математичної освіти у великій мірі залежить від наявності навчальної літератури, яка написана доступною мовою та на високому науково-методичному рівні. Особливо це стосується видань, в яких викладаються фундаментальні поняття, що є основою для вивчення багатьох дисциплін.

До переліку таких понять в першу чергу входять ті, що формуються при вивченні дисципліни «Математичний аналіз». Незважаючи на те, що за даним курсом написано достатньо велика кількість хороших підручників і посібників, видання їх не закінчується. При цьому не тільки вносяться зміни та доповнення, а й удосконалюється методика викладання матеріалу.

Мета посібника — ознайомлення студентів із основними методами розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем, завдання — допомогти в оволодінні алгоритмами розв'язання задач із теорії звичайних диференціальних рівнянь та застосувати набуті навички у самостійній роботі.

Матеріал посібника розбитий на 6 параграфів. Кожний параграф починається теоретичною частиною, в якій викладено основні математичні поняття. При цьому розкриваються найбільш важливі поняття теорії, наведено розв'язання типових задач і завдання для самостійної роботи. Описано методи розв'язання диференціальних рівнянь першого, другого, n-го порядків, систем диференціальних рівнянь, елементи теорії стійкості.

При вивченні диференціальних рівнянь першого порядку розглянуто зокрема: загальні поняття та означення, задача Коші; диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними; однорідні диференціальні рівняння і диференціальні рівняння, які зводяться до них; лінійні диференціальні рівняння, рівняння Бернуллі; диференціальні рівняння в повних диференціалах; диференціальні рівняння, не розв'язні відносно похідної.

Для диференціальних рівнянь вищих порядків наведено основні поняття й означення; сформульовано задачу Коші; класифіковано диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку; розглянуто лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами, лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами з правими частинами спеціального вигляду, метод варіації сталих.

Для нормальних систем диференціальних рівнянь наведено основні поняття й означення; сформульовано задачу Коші, описано розв'язування систем диференціальних рівнянь методом виключення, а також нормальні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

При вивченні елементів теорії стійкості дається поняття про теорію стійкості Ляпунова, досліджується поведінка траєкторії диференціального рівняння в околі особливої точки.

До кожного параграфа пропонуються систематизовані добірки задач для самостійного розв'язування. Запропоновані задачі мають тренувальний і контролюючий характер і можуть бути використані для проведення як практичних занять, так і для самостійної роботи.

Структура посібника сприяє розвитку й активізації самостійної роботи студентів.

Посібник розрахований на студентів вищих навчальних закладів природничих, технічних та економічних спеціальностей.

§1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЇХНІЙ ПОРЯДОК, ЗАГАЛЬНИЙ І ЧАСТИННИЙ РОЗВ'ЯЗКИ ТА ІНТЕГРАЛИ

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y=f(x)$ та її похідні.

Порядком диференціального рівняння називається порядок старшої похідної, яка входить у це рівняння.

Диференціальне рівняння n-го порядку у загальному вигляді записується так:

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0.$$

Розв'язком диференціального рівняння називається будь-яка функція $y=f(x)$, яка перетворює це рівняння у тотожність. Розв'язок $F(x,y)=0$, заданий у неявному вигляді, називається ***інтегралом диференціального рівняння.*** Графік розв'язку диференціального рівняння називається ***інтегральною кривою.***

Задача Коші. *Знайти розв'язок $y=f(x)$ диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:*

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

де x_0, y_0, y_0', y_0'', …, $y_0^{(n-1)}$ — задані числа.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називається функція $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$, яка має такі властивості:

1) при будь-яких значеннях довільних сталих C_1, C_2, …, C_n вона перетворює рівняння у тотожність;

2) значення сталих C_1, C_2, …, C_n можна підібрати так, щоб вона задовольняла початкові умови.

Загальний розв'язок, який заданий у неявному вигляді

$$\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0,$$

називається ***загальним інтегралом***.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального, якщо надати визначені значення довільним сталим, тобто розв'язок вигляду

$$y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0),$$

де C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0 — фіксовані числа.

Частинним інтегралом диференціального рівняння називається інтеграл, який одержується із загального розв'язку шляхом фіксування довільних сталих:

$$\Phi(x,y,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0)=0,$$

де C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0 — фіксовані числа.

Приклад 1. Визначити порядок диференціального рівняння:

1) $y''+5y'-4y+2=0$; 2) $x(x-1)y'-(2x-1)y-(2x-1)=0$;

3) $y^{IV}-25y''=0$; 4) $y'''-2y''-y'+2y=0$.

◄Перше рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку, оскільки порядок старшої похідної, яка входить у це рівняння, дорівнює 2, друге — рівнянням першого порядку, бо воно містить тільки першу похідну. У першому рівнянні коефіцієнти при y, y', y'' і вільний член є числами, у другому рівнянні вони залежать від x.

Третє рівняння є рівнянням четвертого порядку, оскільки порядок старшої похідної дорівнює 4, четверте — рівнянням третього порядку, оскільки третя похідна є старшою похідною, яка міститься у цьому рівнянні. Третє рівняння не містить y, y', y''' і x, четверте також не містить x.►

Приклад 2. Перевірити, чи функція $y=e^{-4x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y'''+64y=0$.

◄Знайдемо похідні даної функції:

$$y'=-4e^{-4x},\ y''=16e^{-4x},\ y'''=-64e^{-4x}.$$

Підставляючи вирази для y і y''' у диференціальне рівняння, одержимо тотожність

$$-64e^{-4x}+64e^{-4x}\equiv 0.$$

Це означає, що функція $y=e^{-4x}$ є розв'язком рівняння. Цей розв'язок є частинним, бо він не містить довільних сталих.►

Приклад 3. Перевірити, чи функція $y=C_1e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ задовольняє рівняння $y''-5y'+6y=3x-1$. Чи є цей розв'язок загальним?

◄Знаходимо похідні даної функції:

$$y'=2C_1e^{2x}+\frac{1}{2},\ y''=4C_1e^{2x}.$$

Підставляємо вирази для y, y' і y'' у шукане рівняння:

$$4C_1e^{2x}-5\left(2C_1e^{2x}+\frac{1}{2}\right)+6\left(C_1e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=4C_1e^{2x}-10C_1e^{2x}-\frac{5}{2}+6C_1e^{2x}+3x+\frac{3}{2}\equiv 3x-1.$$

Оскільки одержано тотожність, то функція $y=C_1e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ є розв'язком даного рівняння. Цей розв'язок не є загальним, бо він містить тільки одну довільну сталу, а порядок рівняння дорівнює 2.►

Приклад 4. Переконатися у тому, що функція $y=C_1e^{3x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ є розв'язком рівняння $y''-5y'+6y=3x-1$.

◄Знаходимо похідні

$$y'=3C_1e^{3x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2},\ y''=9C_1e^{3x}+9C_2e^{3x}$$

і, підставивши вирази для y, y' і y'' у дане рівняння, одержуємо тотожність

$$(9C_1e^{3x}+9C_2e^{3x})-5\left(3C_1e^{3x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2}\right)+6\left(C_1e^{3x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=(9C_1e^{3x}+9C_2e^{3x})-5(3C_1e^{3x}+3C_2e^{3x})-\frac{5}{2}+6(C_1e^{3x}+C_2e^{3x})+3x+\frac{3}{2}\equiv 3x-1.$$

Отже, дана функція є розв'язком диференціального рівняння. Цей розв'язок є частинним, бо він містить лише одну незалежну сталу (сталі C_1 і C_2 у даному випадку не є незалежними: їхню кількість можна зменшити; оскільки сума двох сталих також є сталою, то можна позначити $C_1+C_2=C$), тоді

$$y=Ce^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}.\text{►}$$

Приклад 5. Показати, що функція $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ є загальним розв'язком рівняння $y''-5y'+6y=3x-1$.

◄Дана функція містить дві незалежні довільні сталі (їхню кількість не можна зменшити, як у попередньому прикладі).

Оскільки

$$y'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2},\ y''=4C_1e^{2x}+9C_2e^{3x},$$

то підстановка виразів y, y', y'' у рівняння зводить його до тотожності

$$(4C_1e^{2x}+9C_2e^{3x})-5\left(2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2}\right)+6\left(C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=4C_1e^{2x}+9C_2e^{3x}-10C_1e^{2x}-15C_2e^{3x}-\frac{5}{2}+6C_1e^{2x}+6C_2e^{3x}+3x+\frac{3}{2}\equiv 3x-1.$$

Отже, дана функція задовольняє рівняння, а це означає, що вона є загальним розв'язком даного диференціального рівняння.►

Приклад 6. Задано загальний розв'язок $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ диференціального рівняння $y''+9y=0$. Який частинний розв'язок одержується при $C_1=2$, $C_2=3$? При яких значеннях параметрів C_1 і C_2 одержуються частинні розв'язки: $y=\cos 3x$, $y=\sin 3x$?

◄Підставляючи значення $C_1=2$, $C_2=3$ у формулу для загального розв'язку, одержимо частинний розв'язок $y=2\cos 3x+3\sin 3x$. Частинний розв'я-

зок $y=\cos 3x$ одержується із загального при $C_1=1$, $C_2=0$, а частинний розв'язок $y=\sin 3x$ — при $C_1=0$, $C_2=1$.►

Приклад 7. Показати, що функція $y^2+x^2-Cy=0$ є загальним інтегралом диференціального рівняння $y'(y^2-x^2)+2xy=0$.

◄Диференціюючи по x дану неявну функцію, одержимо

$$2yy'+2x-Cy'=0,\ y'(2y-C)=-2x,\ y'=\frac{2x}{C-2y}.$$

З рівняння $y^2+x^2-Cy=0$ знаходимо сталу $C=\dfrac{y^2+x^2}{y}$ і підставляємо її вираз у формулу для похідної y':

$$y'=\frac{2x}{\dfrac{y^2+x^2}{y}-2y}=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Підстановка похідної у диференціальне рівняння зводить його до тотожності

$$\frac{2xy}{x^2-y^2}(y^2-x^2)+2xy\equiv 0.$$

Отже, неявна функція $y^2+x^2-Cy=0$, залежна від однієї довільної сталої, є розв'язком диференціального рівняння, тобто є його загальним інтегралом.►

Приклад 8. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є функція $y=C_1x-C_2$, яка залежить від двох довільних сталих.

◄Двічі диференціюючи дану функцію, виключаємо сталі C_1 і C_2: $y'=C_1$, $y''=0$. Отже, рівняння $y''=0$ задовольняє умову задачі.►

Приклад 9. Скласти диференціальне рівняння, загальний розв'язок якого має вигляд $y=C_1x-\dfrac{C_2}{x}$.

◄Диференціюючи дану функцію, одержимо:

$$y'=C_1+\frac{C_2}{x^2},\ y''=-\frac{2C_2}{x^3}.$$

З рівнянь

$$y=C_1x-\frac{C_2}{x},\ y'=C_1+\frac{C_2}{x^2}$$

виключаємо C_1. Помноживши друге рівняння на x і віднявши від нього перше, одержимо

$$xy'-y=\frac{2C_2}{x}.$$

Додаючи це рівняння до рівняння

$$y''=-\frac{2C_2}{x^3},$$

помноженого на x^2, виключимо C_2:

$$xy'-y+y''x^2=0.$$

Одержане рівняння є шуканим.►

Приклад 10. Знайти диференціальне рівняння сукупності кривих $y=Cx^4$.

◄Диференціюючи дану функцію, одержуємо $y'=4Cx^3$. Підставляючи сюди вираз $C=\frac{y}{x^4}$, одержаний з даного рівняння, знаходимо шукане диференціальне рівняння $y'=4\cdot\frac{y}{x^4}\cdot x^3$, або $y'=\frac{4y}{x}$.►

Задачі для самостійного розв'язування.

Визначити порядок диференціального рівняння.

1. $y'+p(x)y=q(x)$.
2. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$.
3. $y'''-ay''+by'+cy=0$.
4. $y^V+y^{IV}-y=0$.

5. Загальний розв'язок диференціального рівняння $y''-4y'+3y=0$ має вигляд $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$. Знайти частинні розв'язки у випадках:

а) $C_1=0$, $C_2=1$; б) $C_1=1$, $C_2=0$; в) $C_1=1$, $C_2=-2$.

6. Загальний інтеграл диференціального рівняння $2xyy'=y^2-x^2$ має вигляд $x^2+y^2-Cx=0$. Знайти частинні інтеграли при $C=4$, $C=-6$, $C=-8$, $C=10$ і побудувати їх.

З'ясувати, чи функція є розв'язком диференціального рівняння.

7. $xy'=2y$, $y=5x^2$.
8. $y''=x^2+y^2$, $y=\frac{1}{x}$.
9. $(x+y)dx+xdy=0$, $y=\frac{C^2-x^2}{2x}$.
10. $y''+y=0$, $y=3\sin x-4\cos x$.
11. $y'=y\operatorname{ctg}x+2\operatorname{ctg}x$, $y=3+4\operatorname{tg}x$.
12. $xy^2y'=x^2+y^3$, $y=x^3$.
13. $y'\sin x=y\ln y$, $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.
14. $y'=xe^{x^2}(1+y^2)$, $y=e^{-x^2}$.
15. $y''+4y'+5y=0$, $y=e^{-2x}\sin x$.
16. $y''-4y'+4y=0$, $y=xe^x$.
17. $y''-2y'+y=0$, а) $y=xe^x$, б) $y=x^2e^x$.

Перевірити, чи функція задовольняє диференціальне рівняння; з'ясувати, яким розв'язком вона є — загальним чи частинним.

18. $y=\sqrt{x}$, $2yy'=1$.

19. $\ln x\ln y=C$, $y\ln y+x\ln xy'=0$.

20. $y=Ce^{-2x}$, $y'+2y=0$.

21. $y-x+C_1\ln y=C_2$, $yy''=(y')^2-(y')^3$.

22. $x^2+2xy=C$, $(x+y)+xy'=0$.

23. $y=-x-\dfrac{\sin 2x}{2}$, $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$.

24. $y=x(\ln x^2+C)$, $xy'-y=2x$.

25. $x^2+y^2=C^2$, $x+yy'=0$.

26. $y^2-x^2=2y$, $y'(x^2+y^2)-2xy=0$.

27. $y=C_1e^x\sin x$, $y''-2y'+2y=0$.

28. $y=\dfrac{1}{2}(x+1)^4+(x+1)^2$, $y'-\dfrac{2}{x+1}y=(x+1)^3$.

29. $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3$, $xy'''=2$.

30. $y=C_1x+C_2x^2$, $x^2y''-2xy'+2y=0$.

31. $y=C_1\sin 7x+C_2\cos 7x$, $y''+49y=0$.

32. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$, $y'''-6y''+11y'-6y=0$.

Перевірити, чи для диференціального рівняння співвідношення є його інтегралом.

33. $(x-y+1)y'=1$, $y=x+Ce^y$.

34. $(x-2y)y'=2x-y$, $x^2-xy+y^2=C^2$.

35. $(xy-x)y''+x(y')^2+yy'-2y'=0$, $y=\ln(xy)$.

Знайти диференціальне рівняння сукупності кривих.

36. $y=Cx$.

37. $y=Ce^x$.

38. $y=C\sin x$.

39. $y=Cx^2$.

40. $y^2=2Cx$.

41. $x^2+y^2=C^2$.

42. $x^3=C(x^2-y^2)$.

43. $y^2+\dfrac{1}{x}=2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}$.

44. $\ln\dfrac{x}{y}=1+Cy$.

Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є функція.

45. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-4x}$.

46. $y=C_1\sin 5x+C_2\cos 5x$.

47. $y=C_1+C_2\sin(x+C_3)$.

48. $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}+C_3$.

49. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+C_3e^{3x}$.

50. $y=C_1e^{-3x}+C_2\cos 2x$.

Для сукупності кривих знайти лінію, яка задовольняє початкові умови.

51. $x^2-y^2=C^2$, $y(0)=5$.

52. $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

53. $y=C_1\sin(x-C_2)$, $y(\pi)=1$, $y'(\pi)=0$.

54. $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-2$.

§2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння відносно шуканої функції та її першої похідної. У загальному вигляді це рівняння можна записати так:

$$F(x,y,y')=0\,. \tag{2.1}$$

Якщо рівняння (2.1) розв'язне відносно y', то

$$y'=f(x,y)\,,\ \text{або}\ dy=f(x,y)dx\,. \tag{2.2}$$

Рівняння (2.2) можна записати так:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\,.$$

Розв'язком диференціального рівняння **(2.1)** називається функція $y=y(x)$, підстановка якої та її похідної першого порядку в це рівняння перетворює його у тотожність.

Графік розв'язку називається ***інтегральною кривою***.

Задача Коші. *Знайти розв'язок* $y=y(x)$ *диференціального рівняння* (2.1), *який задовольняє початкову умову:*

$$y(x_0)=y_0\,, \tag{2.3}$$

де x_0, y_0 *— задані числа, які називаються* ***початковими даними розв'язку***.

Іншими словами: знайти інтегральну криву рівняння (2.1), яка проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0)$.

Загальним розв'язком диференціального рівняння **(2.1)** називається функція

$$y=\varphi(x,C)\,, \tag{2.4}$$

яка має такі властивості:

1) при будь-яких значеннях довільної сталої C вона перетворює рівняння (2.1) у тотожність;

2) значення сталої C можна підібрати так, щоб вона задовольняла умову (2.3).

Загальний розв'язок, заданий у неявному вигляді

$$\Phi(x,y,C)=0\,, \tag{2.5}$$

називається ***загальним інтегралом.***

Геометрично загальний розв'язок (і загальний інтеграл) зображається сукупністю інтегральних кривих на площині, які залежать від одного параметра C.

Частинним розв'язком рівняння **(2.1)** називається розв'язок, який одержується із загального розв'язку (2.4) при фіксованому значенні C:

$$y=\varphi(x,C_0)\,, \tag{2.6}$$

де C_0 — фіксоване число. Стала C_0, яка визначає шуканий частинний розв'язок, знаходиться з рівняння $y_0=\varphi(x_0,C)$.

Частинним інтегралом рівняння **(2.1)** називається інтеграл, який одержується із загального інтеграла (2.5) при фіксованому значенні $C=C_0$:

$$\Phi(x,y,C_0)=0. \tag{2.7}$$

2.1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння вигляду

$$X(x)Y(y)dx+X_1(x)Y_1(y)dy=0, \tag{2.8}$$

де $X(x)$, $X_1(x)$ — функції тільки від x; $Y(y)$, $Y_1(y)$ — функції тільки від y.

Рівняння (2.8) діленням на $Y(y)X_1(x)$ зводиться до ***диференціального рівняння з відокремленими змінними***:

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx+\frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy=0. \tag{2.9}$$

Загальний інтеграл рівняння (2.9) має вигляд

$$\int\frac{X(x)}{X_1(x)}dx+\int\frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy=C. \tag{2.10}$$

Зауваження 1. При діленні на добуток $Y(y)X_1(x)$ можна втратити ті розв'язки рівняння (2.8), які перетворюють цей добуток у нуль. Безпосередньою підстановкою легко переконатися в тому, що функція $x=a$, де a є коренем рівняння $X_1(x)=0$, тобто $X_1(a)=0$, є розв'язком рівняння (2.8). Функція $y=b$, де b є коренем рівняння $Y_1(y)=0$, тобто $Y_1(b)=0$, також є розв'язком рівняння (2.8). Розв'язки $x=a$ і $y=b$, якщо вони є, геометрично зображаються прямими лініями, які є паралельними відповідно до осей Oy і Ox.

Диференціальне рівняння вигляду $y'=f(ax+by+c)$, $b\neq0$, зводиться до рівняння вигляду (2.8) за допомогою підстановки $u=ax+by+c$, де u — нова шукана функція.

Приклад 1. Проінтегрувати рівняння $y'=-\frac{x}{y}$ ($y\neq0$). Знайти інтегральну криву, яка проходить через точку $M(-6;8)$.

◀Дане рівняння перепишемо так:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}, \text{ або } xdx+ydy=0.$$

Одержане рівняння є рівнянням з відокремленими змінними (коефіцієнт при dx — функція тільки від x, при dy — функція тільки від y).

Інтегруючи, одержимо

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C_1, \text{ або } x^2+y^2=2C_1.$$

Покладаючи $2C_1=C^2$ (що можна зробити, оскільки $x^2+y^2\geq 0$), загальний інтеграл запишемо у вигляді

$$x^2+y^2=C^2.$$

Геометрично загальний інтеграл зображає сукупність кіл із радіусами C з центром у початку координат.

Знайдемо те коло, яке проходить через точку $M(-6;8)$. Підставляючи координати точки M у рівняння $x^2+y^2=C^2$, знаходимо

$$(-6)^2+8^2=C^2, \text{ або } C^2=100.$$

Підставивши значення C^2 у загальний інтеграл, одержимо шукане коло

$$x^2+y^2=100.\blacktriangleright$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ ($x\neq 0$). Знайти частинний розв'язок, який задовольняє умову: $y=-2$ при $x=4$.

◄Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$\ln|y|+\ln|x|=C_1. \qquad (A)$$

Сталу C_1 запишемо у вигляді

$$C_1=\ln|C|,\ C\neq 0$$

(оскільки будь-яке додатне чи від'ємне число C_1 може зображатися як натуральний логарифм іншого, додатного числа $|C|$).

Підставляючи вираз для C_1 у рівність (А) і перетворюючи її, одержимо

$$\ln|xy|=\ln|C|,\ C\neq 0.$$

Потенціюючи останню рівність, знаходимо загальний інтеграл

$$xy=C,\ C\neq 0,$$

який геометрично зображається сукупністю гіпербол, асимптотами яких є координатні осі.

Розв'яжемо задачу Коші для даного рівняння за даними початковими умовами: $y_0=-2$ при $x_0=4$. Підставивши ці значення у рівняння $xy=C$, одержимо

$$4\cdot(-2)=C, \text{ або } C=-8.$$

Таким чином, одержаний частинний розв'язок має вигляд

$$xy=-8.$$

Це гіпербола, яка проходить через точку $M_0(4;-2)$.►

Зауваження 2. Відокремлюючи змінні, припускається, що $y \neq 0$, і тому може втратитись розв'язок $y=0$. Справді, $y=0$ — розв'язок рівняння (у чому можна переконатися безпосередньо), який одержується із загального інтеграла при $C=0$. Таким чином, загальний інтеграл визначається формулою $xy=C$, де C набуває будь-яких дійсних значень (у тому числі і $C=0$).

Приклад 3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2y+1}.$$

◄Для відокремлення змінних помножимо обидві частини рівняння на $(2y+1)\,dx$, одержимо

$$(2y+1)\,dy=3x^2dx.$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо загальний інтеграл

$$y^2+y-x^3=C.\text{►}$$

Приклад 4. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx}=y\operatorname{ctg}x.$$

◄Для відокремлення змінних обидві частини рівняння поділимо на $y \neq 0$ і помножимо на dx, одержимо

$$\frac{dy}{y}=\operatorname{ctg}x\,dx.$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$$\ln|y|=\ln|\sin x|+C_1.$$

Для зручності потенціювання одержаної рівності зобразимо параметр C_1 у логарифмічній формі, поклавши

$$C_1=\ln|C_2|,\ C_2 \neq 0.$$

Тоді

$$\ln|y|=\ln|C_2\sin x|$$

і, потенціюючи, одержимо загальний розв'язок у вигляді

$$y=C_2\sin x.$$

Зауважимо, що початкове диференціальне рівняння має, очевидно, ще розв'язок $y=0$, який не входить до загального розв'язку, оскільки $C_2 \neq 0$.

Введемо новий параметр C, який набуває, на відміну від C_2, також і нульового значення. Тоді розв'язок $y=0$ увійде у загальний розв'язок

$$y=C\sin x.\text{►}$$

Приклад 5. Проінтегрувати диференціальне рівняння

$$(1+x^4)\,dy-4x^3y\,dx=0.$$

Знайти частинний розв'язок, який задовольняє умову: $y=1$ при $x=0$.

◄Дане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними (коефіцієнт при dy — функція тільки від x, при dx — добуток функцій, одна з яких залежить тільки від x, а друга — тільки від y).

Поділивши обидві частини рівняння на добуток $y(1+x^4)$, одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dy}{y}-\frac{4x^3}{1+x^4}dx=0.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо

$$\ln|y|-\ln(1+x^4)=\ln|C|, \text{ або } \ln\left(\frac{|y|}{1+x^4}\right)=\ln|C|,$$

звідки одержуємо загальний розв'язок

$$y=C(1+x^4).$$

Щоб знайти шуканий розв'язок, досить визначити значення C за початковими умовами:

$$1=C(1+0),\ C=1.$$

Отже, частинний розв'язок має вигляд

$$y=1+x^4.\text{►}$$

Зауваження 3. При діленні на $y(1+x^4)$ припускається, що $y(1+x^4)\neq 0$, тобто $y\neq 0$, $1+x^4\neq 0$. Але $y=0$ — розв'язок рівняння, у чому можна переконатися. Цей розв'язок одержується із загального розв'язку при $C=0$.

Приклад 6. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$(x^2y^3+x^2)dx+(y^2-x^3y^2)dy=0.$$

◄Виносячи відповідні множники за дужки, дане рівняння запишемо так:

$$x^2(y^3+1)dx+y^2(1-x^3)dy=0,$$

звідки видно, що це рівняння з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві частини останнього рівняння на добуток $(y^3+1)(1-x^3)\neq 0$, одержимо

$$\frac{x^2}{1-x^3}dx+\frac{y^2}{1+y^3}dy=0.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо

$$-\ln|1-x^3|+\ln|1+y^3|=\ln|C|, \text{ або } \ln\left|\frac{1+y^3}{1-x^3}\right|=\ln|C|,$$

звідки одержуємо загальний інтеграл

"КНИГА ПОШТОЮ" А/С 529
м. Тернопіль, 46008
т. (0352) 287489, 511141
(067) 3501870, (066) 7271762
mail@bohdan-books.com

Науково-популярне видання

БОДНАР Дмитро Ількович
ВОЗНЯК Ольга Григорівна
БУЯК Леся Михайлівна

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ У 3-Х ЧАСТИНАХ ЧАСТИНА ІІІ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Володимир Басалига*

Підписано до друку 6.09.2015. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 10,23. Умовн. фарбо-відб. 10,23.
[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48
E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com