М. М. Левшин, Є. О. Лодатко

МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

У трьох частинах

Частина II

За загальною редакцією доктора педагогічних наук,
професора Є. О. Лодатка

Для студентів вищих педагогічних навчальних закладів напряму підготовки 6.010102 «Початкова освіта»

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7
Л 34

Рецензенти:
Бурда М. І. – доктор педагогічних наук, професор,
дійсний член НАПН України, завідувач відділу математичної та
інформатичної освіти Інституту педагогіки НАПН України;
Працьовитий М. В. – доктор фізико-математичних наук, професор,
директор Фізико-математичного інституту Національного
педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова,
завідувач відділу Фрактального аналізу Інституту математики
Національної академії наук України;
Чашечникова О. С. – доктор педагогічних наук, професор,
професор кафедри математики Сумського державного педагогічного
університету ім. А. С. Макаренка

Рекомендовано вченими радами
Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова
(*протокол № 12 від 29 травня 2014 р.*),
Черкаського національного університету ім. Богдана Хмельницького
(*протокол № 7 від 17 червня 2014 р.*)

Левшин М. М.
Л 34 Математика : навч. посібник для напряму підготовки 6.010102 «Початкова освіта» пед. навч. закладів : у 3 ч. Ч. II / М. М. Левшин, Є. О. Лодатко ; за заг. ред. Є. О. Лодатка. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. – 224 с.

ISBN 978-966-10-4224-6

Посібник підготовлено відповідно до чинних стандартів галузі знань «Педагогічна освіта» напряму підготовки «Початкова освіта».

До посібника включено теоретичний матеріал, який призначається для опрацювання на етапі ознайомлення з теоріями невід'ємного цілого числа і подільності чисел.

Для студентів вищих педагогічних навчальних закладів.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-966-10-4224-6

ПЕРЕДМОВА

Натуральні числа створив Бог,
усе інше – справа рук людських.

Л. Кронекер

Цей посібник призначений для забезпечення фундаментальної математичної підготовки бакалаврів напряму підготовки «Початкова освіта» відповідно до чинних стандартів галузі знань «Педагогічна освіта».

Перша частина посібника була видана у 2012 році і містила теоретичний матеріал, активне оперування яким сприяло формуванню ідейного, понятійного і процедурного фундаменту, необхідного для успішного вивчення всіх інших розділів і тем курсу математики.

До другої частини посібника увійшли ключові питання, що вважаються основою для опанування майбутнім учителем основних ідей і понять, які становлять основу для побудови теорії невід’ємного цілого числа, знайомства з різними системами числення, а також дослідження питань, пов’язаних із подільністю чисел.

Виходячи з того, що у початкових класах змістово-методична лінія розвитку поняття числа посідає провідне місце, у посібнику деталізовано різні підходи до побудови теорії невід’ємного цілого числа, дібрано достатню кількість належних завдань, метою яких є опрацювання тих понять, прийомів, процедур і схем міркувань, що зазвичай застосовуються при розв’язанні типових задач на подільність чисел.

Значна увага приділяється логіці викладення матеріалу, що відіграє важливу роль в усвідомленні майбутніми вчителями змістово-логічних зв’язків між математичними поняттями і методами та у засвоєнні логіко-математичних конструкцій шкільного курсу математики.

У посібнику широко використовуються мова і символіка сучасної математики, що цілком природно, оскільки майбутній учитель початкових класів ще в період навчання в університеті має звикнути до них та навчитися правильно користуватися абетками, що застосовуються у математиці, математичною термінологією та математичною символікою.

Ці «синтаксичні» і «семантичні» компоненти є невід'ємною складовою не тільки математичної, а й загальної культури вчителя: учитель, який не володіє цими засобами, не зможе навчити учнів користуватися математичною мовою, як і залучити їх до математичної самоосвіти.

У посібнику вживаються традиційні для математики:

<u>`позначення:`</u>

$\boldsymbol{N}$ – множини натуральних чисел, тобто чисел $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, що вживаються для лічби предметів чи вказування порядкового номера того чи іншого предмета серед сукупності однорідних предметів[1];

$\boldsymbol{N}_0$ – множини невід'ємних цілих чисел, тобто чисел $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$;

$\boldsymbol{Q}_+$ – множини додатних раціональних чисел;

<u>`записи:`</u>

$n \in \boldsymbol{N}$ читається:

«n належить множині $\boldsymbol{N}$» і позначає, що n – натуральне число;

$k \in \boldsymbol{N}_0$ читається:

«k належить множині $\boldsymbol{N}_0$» і позначає, що k – невід'ємне ціле число;

$s \in \boldsymbol{Q}_+$ читається:

«s належить множині $\boldsymbol{Q}_+$» і позначає, що s – додатне раціональне число.

[1] Їх ще називають додатними цілими числами.

Для спрощення орієнтації у структурно-логічній організації змісту в посібнику вживаються оригінальні мітки:

 – *теоретичний матеріал*, що підлягає ретельному опрацюванню без будь-яких виключень;

 – *запитання для самоконтролю*, що слугують основою для визначення повноти й глибини засвоєння теоретичного матеріалу;

 – *завдання для самостійного виконання*, що (в основному) визначають рівень вимог до набутих умінь і навичок;

 – *проблемно-пошукові завдання*, що призначаються для формування у майбутніх учителів умінь визначення ідейно-змістової сутності зв'язків між математичними поняттями та їхньою інтерпретацією у початковому курсі математики;

 – *перелік рекомендованих джерел*, які є у фондах університетських бібліотек або оцифровані й знаходяться у вільному доступі в мережі інтернет.

Крім того, спеціальними маркерами у тексті позначаються:

► – *початок* обґрунтування (доведення) положення;

◄ – *кінець* обґрунтування (доведення) положення.

Відповідно до устояних в математичній літературі традицій, усі поняття, що поступово вводяться в обіг у змісті посібника, виділяються в тексті у вигляді окремих означень і відповідним чином позначаються:

Означення 1., **Означення 2.** і т.д.

Кожне з таких означень є обов'язковим для *усвідомлення, запам'ятовування* й *відтворення* без жодних власних змістових інтерпретацій.

Найбільш суттєві факти (закономірності, залежності), що стосуються окремих математичних понять чи об'єктів, подаються у вигляді властивостей і теорем й позначаються у тексті так:

Властивості об'єднання, **Теорема 1.** тощо.

Окремі з наведених властивостей обґрунтовуються, причому спосіб їхнього обґрунтування обирається такий, щоб його можна було застосовувати також в інших ситуаціях, зокрема при розв'язанні задач.

Доведення теорем підлягають уважному розбору з розрахунку на їхнє *подальше самостійне відтворення*, що є обов'язковою умовою засвоєння навчального матеріалу.

Зміст кожного з розділів посібника завершується *запитаннями для самоконтролю*, *завданнями для самостійного виконання* та *проблемно-пошуковими завданнями*, виконання яких передбачає набуття досвіду застосування розглянутих математичних понять і фактів до розв'язання професійно орієнтованих задач.

До кожного розділу наводиться добірка джерел, якими можна користуватися при самостійному або поглибленому опрацюванні викладеного матеріалу. Серед рекомендованих видань перевагу віддано книгам, що в різні роки використовувалися як навчальні посібники у процесі навчання математики майбутніх учителів початкових класів. Для використання рекомендуються також видання, в яких вичерпно й на належному науковому рівні висвітлюються окремі питання змісту розділів. Переважна частина рекомендованих джерел оцифрована і доступна в мережі інтернет для вільного ознайомлення.

Наприкінці посібника подано покажчик термінів, уживаних при викладенні матеріалу курсу.

Автори сподіваються, що структурно-логічна організація змісту посібника сприятиме якісному засвоєнню й усвідомленню студентами математичних понять і фактів, без яких професійна підготовка майбутнього вчителя не може вважатися задовільною.

Автори

1. НЕВІД'ЄМНІ ЦІЛІ ЧИСЛА

1.1. КОРОТКИЙ ІСТОРИЧНИЙ НАРИС РОЗВИТКУ ПОНЯТТЯ ЧИСЛА

Поняття числа виникло з практичних потреб людини на досить ранньому ступені її розвитку як засіб абстрактного вираження реальних зв'язків (відношень) матеріального світу. Обсяг поняття числа в міру зростання практичних і теоретичних потреб поступово розширювався, а його зміст розвивався й удосконалювався. На кожному етапі розвитку математики рівень знань про число відображав певною мірою можливості математики взагалі і ступінь зрілості її основ зокрема.

Натуральні числа. Історично першою виникла і почала розвиватися система натуральних чисел. Поняттю натурального числа передувало введення в ужиток таких понять, як «більше», «менше», а також закріплення у повсякденній діяльності людини навичок оперування з різними, але малочисельними сукупностями (множинами) об'єктів.

Проте поняття числа виникло значно раніше від тих часів, до яких належать перші історичні пам'ятки, що містять деякі відомості про математичні знання стародавніх людей. Тому про еволюцію поняття натурального числа і процесу лічби можна скласти уявлення лише на підставі вивчення побічних джерел: етнографічних, археологічних, культурологічних, філологічних тощо. Досить високий рівень збігу фактів у різних джерелах свідчить про те, що наші відомості про загальну картину розвитку поняття натурального числа і процесу лічби в ті далекі часи є достатньо достовірними. Однак дістати відповіді на всі питання, пов'язані із зародженням і становленням поняття натурального числа, таким способом не вдається.

Проте напевно відомо, що натуральне число виникло в процесі лічби. На початковій стадії цей процес мав якісний характер і застосовувався до множин з невеликою кількістю об'єктів. У сучасному розумінні це не була лічба, а лише процес впізнавання за певними якісними ознаками елементів певної конкретної множини. Можливо, збираючись на полювання, мисливці «лічили» (підраховували) учасників, визначаючи, чи всі вони зібрались. Можливо, «лічили» кількість голів худоби, переганяючи з одного пасовиська на друге. Можна уявляти, що процес «лічби» супроводжував також інші повсякденні дії тодішньої людини.

Але за будь-яких умов кількість елементів множини на цій стадії тісно пов'язувалася з якісними властивостями цих елементів: кольором, формою, розміром, призначенням тощо. При цьому не завжди кількість елементів виступала як узагальнена властивість множин з однаковою кількістю елементів. Образно кажучи, на ранніх етапах формування поняття числа однакові за кількістю, але різні за складом елементів множини не завжди ототожнювалися.

Важливим етапом у розвитку поняття про число була поява певних еталонів лічби, тобто вибір стандартних множин, які символізували певні невеликі конкретні числа. Першими такими еталонами-множинами були різні частини тіла людини або тварини – дві руки, п'ять пальців тощо. Залишки такої лічби зустрічалися ще в XIX ст. в індійців племені абіпонів, які число 5 іменували «рука», число 10 – «дві руки», 20 – «руки і ноги», а тібетці для назви числа 2 застосовували слово «крило» і т.ін.

І лише згодом, значно пізніше, внаслідок тривалого оперування з різними множинами конкретних об'єктів поступово сформується абстрактне поняття натурального числа, яке слугуватиме для вираження кількості елементів множини незалежно від природи цих елементів.

Числовий запас стародавньої людини зростав дуже повільно і тривалий час залишався вкрай обмеженим. Навіть століття тому лічильний запас окремих племен у Бразилії обмежувався лише трьохелементними множинами, а кількості, більші за три, не розрізнялися і позначалися словом «багато».

У новому кам'яному віці, неоліті[2], людина перейшла до осілого способу життя й від простого збирання їжі до активного її виробництва. Цей процес дав згодом поштовх до розвитку інших важливих видів виробничої діяльності: появі ремесел, удосконаленню спорудження жител, виготовленню знарядь праці тощо. Збільшення масштабів виробничої діяльності людини, активізація матеріального обміну та інших стосунків між племенами сприяли суттєвому зростанню числового запасу й ширшому його використанню. Проте натуральний ряд чисел дуже довго вважали скінченним, хоч і користувалися дедалі більшим числовим запасом. І лише в III ст. до н. е. у праці Архімеда[3] «Псамміт, або обчислення піску в просторі, який дорівнює кулі нерухомих зірок» (відомій як «Лічба піску») в явному вигляді формулюється ідея нескінченності натурального ряду.

З ідеєю нескінченності натурального ряду зазвичай пов'язуються й уявлення про великі числа, що культивувалися в деяких давніх релігійних вченнях та легендах. Зокрема, особливо важливе значення великим числам відводилося в Китаї та Індії, де вони символізували могутність.

Наприклад, за древньоіндійськими легендами Будда ще юнаком відзначався мистецтвом лічби; він знав числа, якими можна було полічити все: зернини в полі, піщинки у річці Ганг і весь пісок мільйона рік, таких великих, як Ганг. Будда «знав» навіть число, за допомогою якого боги обчислюють своє минуле і майбутнє.

Системи числення (нумерації). Користування натуральними числами потребувало певних способів їх позначення. Стародавні люди результати лічби фіксували зарубками на деревах, кістках тварин, а також вузлами на мотузках. З появою письма почали вироблятися певні знакові (символьні) системи позначення чисел.

---

[2] *Неоліт* – новий кам'яний вік (X – поч. III тис. до н. е.), що прийшов на зміну мезоліту та передував мідному віку.

[3] *Архімед* (бл. 287–212 рр. до н. е.) – давньогрецький математик, фізик, інженер, винахідник та астроном.

Системи числення пройшли дві стадії історичного розвитку. На першій, ранній стадії були поширені різноманітні непозиційні[4] системи числення, в основу яких було покладено адитивний[5], субстрактивний[6] і мультиплікативний[7] принципи. Як свідчать історичні документи, в межах однієї системи числення кілька з них могли використовуватися одночасно.

Зауваження. Серед стародавніх систем числення винятком може вважатися вавилонська система числення, що містить деякі ознаки позиційних систем[8] і тому її часто називають *напівпозиційною*.

У напівпозиційній системі числення для кожної десяткової (розрядної) цифри використовується кілька різних знаків: один – для зображення даної цифри в розряді одиниць, другий – для зображення тієї ж цифри в розряді десятків, третій – для її зображення в розряді сотень ... Нуль у такій системі числення зазвичай відсутній, оскільки в різних розрядах позначення цифр відрізняються при тому, що вже саме позначення цифри вказує на розряд, в якому вона стоїть.

За допомогою такої системи можна було виконувати всі звичайні арифметичні дії з цілими числами в межах від одиниці до тисячі. Але для чисел, більших за тисячу, доводилося застосовувати спеціальні додаткові значки.

Наприклад, у старій слов'яно-грецькій системі запису чисел (що використовувалася до появи позиційної системи числення і арабських цифр на Русі) цифра «один» зображувалася трьома способами:

1) буквою A, якщо одиниця стояла в розряді одиниць, тобто в першому розряді;

2) буквою I, якщо одиниця стояла в розряді десятків, тобто у другому розряді;

3) буквою P, якщо одиниця стояла в розряді сотень, тобто у третьому розряді.

Відповідно, число PA у такому записі означало 101 (у нинішній позиційній системі). Причому в записі числа 101 використовується нуль, що позначає відсутню цифру в другому розряді.

Суть *адитивного* принципу полягає в тому, що для так званих вузлових чисел (утворених здебільшого за десятковим принципом, наприклад: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 та ін.) існували індивідуальні позначення, а

---

[4] *Непозиційна* система числення – це система запису чисел, у якій значення кожної цифри (знака) в записі числа не залежить від позиції, яку вона (він) займає.

[5] *Адитивний* – від лат. *addere* -– додавати.

[6] *Субстрактивний* – від італ. *substractio* – віднімання.

[7] *Мультиплікативний* – від лат. *multiplicatio* – множення.

[8] *Позиційна* система числення – це система запису чисел, у якій одна й та ж цифра (знак) у записі числа набуває різних значень залежно від займаної нею (ним) позиції.

інші (алгоритмічні) числа діставали за допомогою додавання вузлових чисел. Принцип адитивності в чистому вигляді використовувався в стародавній єгипетській системі числення. Але його реалізацію можна побачити й у римській нумерації, де запис XVI означає *десяток та ще п'ять і один*, тобто $10 + 5 + 1 = 16$.

Згідно із *субстрактивним* принципом, записані поряд знаки чисел A і B таких, що де $A < B$, тлумачаться як різниця чисел B і A. Цей принцип, зокрема, реалізовано у римській нумерації, де запис IX означає *десяток без одиниці*, тобто X – I, або ж у звичному для нас вигляді $10 - 1 = 9$.

Мультиплікативний принцип полягає в тому, що записані поряд (горизонтально або вертикально) знаки A і B чисел читаються як добуток числа A на число B. Цей принцип використовувався у стародавніх китайській та індійській системах числення. Системи числення, в яких використовувався мультиплікативний принцип, за своєю структурою ближчі до позиційних систем. Наприклад, цей принцип реалізується у десятковій системі числення, де запис типу 40 означає *чотири десятки*, тобто $40 = 4 \cdot 10$.

Серед непозиційних систем, починаючи з V ст. до н. е., значно поширилася алфавітна система. Вперше її стали застосовувати в грецькій малоазіатській колонії Іонії[9]. У цій системі числа зображували буквами алфавіту, причому, щоб відрізнити букву-звук від букви-числа, над останньою проводили горизонтальну риску або ставили зверху штрих. Наприклад, числа від 1 до 9 включно позначали відповідно так: $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\delta}$, $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\zeta}$, $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\theta}$.

Аналогічно позначали числа від 10 до 90 і від 100 до 900. Для позначення круглих тисяч (до 10 000) використовували ті самі букви, що й для зображення чисел від 1 до 9, але перед ними ставили коми. Число 10 000 позначали буквою М. Для зображення чисел, кратних М, біля М ставили відповідний множник. Для позначення інших чисел користувалися адитивним принципом.

[9] Звідси й назва – *іонійська* система числення.

Наприклад: 45 – $\overline{\mu\varepsilon}$, де $\overline{\mu}$ – 40,

2471 – $\overline{\beta\nu o\alpha}$, де $\overline{\nu}$ – 400, $\overline{o}$ – 70 і т. д.

Алфавітна система була по суті завершальним етапом у розвитку непозиційних систем числення і мала значні переваги (особливо при виконанні операцій над числами) перед іншими відомими непозиційними системами. Вона була поширена не тільки в Індії, а й серед інших народів, наприклад, слов'янського народу, арабського та ін.

Основна ідея позиційної системи числення – принцип помісцевого значення цифр – уперше зустрічається близько 4 000 років тому в шістдесятковій системі числення стародавніх вавилонян, що в той період заселяли територію між річками Тигр і Євфрат.

Вважається, що сучасна позиційна десяткова система числення зародилася і розвинулася в Індії, починаючи із V ст. н. е. Згодом індійську позиційну систему запозичують інші народи. У VIII ст. н. е. цією системою вже користуються араби, а з IX ст. її поступово починають уживати і європейські народи.

Поширенню в Європі індійської позиційної системи значною мірою сприяла перекладена в XII ст. латинською мовою «Книга про індійські числа» Мухаммада аль-Хорезмі[10], в якій він досить повно (для того часу) виклав арифметику в позиційній десятковій системі числення. Проте переходу в Європі до нової системи числення досить довго чинили опір представники офіційних схоластичних наук, а також окремі уряди. Тільки з другої половини XV ст., в епоху Відродження, позиційна

[10] *Мухаммад аль-Хорезмі* (787–бл. 850) – повне ім'я *Абу Абдулла Абу Джафар Мухаммад ібн Муса аль-Хорезмі* – видатний перський математик, географ, історик та астроном. Уперше виділив *алгебру* як самостійну дисципліну (термін походить від назви однієї з праць аль-Хорезмі, а саме, «Китаб валь-Джебр аль-Мукабала», тобто «Книга про відновлення і протиставлення»).
Його книга «Китаб аль-хісаб аль-хінді» («Книга про індійські числа») стала прототипом багатьох рукописів, складених європейцями латинською мовою, на якій ім'я вченого аль-Хорезмі стало звучати як «алхорізм», «алгорифм» або «алгоритм» і дало назву терміну *алгоритм*.

система числення набуває в Європі загального визнання і великого поширення. У нашій країні вона ввійшла в ужиток, починаючи із XVII ст.

В Італії до XIII ст., а в інших країнах Західної Європи – до XVI ст. переважала так звана римська нумерація, залишки якої збереглися ще й зараз. Зокрема, ми користуємося нею для позначення ювілейних дат, нумерації розділів у книгах, строф у віршах і т. ін.

У римській нумерації для позначення скінченного набору «*вузлових*» чисел використовувалися деякі знаки, які осучаснено виглядають так:

$$\mathrm{I} = 1,\ \mathrm{V} = 5,\ \mathrm{X} = 10,\ \mathrm{L} = 50,\ \mathrm{C} = 100,\ \mathrm{D} = 500,\ \mathrm{M} = 1\,000.$$

Усі інші числа утворюються з вузлових чисел послідовним їх записом за певними *правилами*:

– підряд одна і та ж цифра в запису числа може записуватися не більше трьох разів, але тільки якщо їй передує більша цифра;
– якщо менша цифра стоїть після більшої або такої самої, то їхні числові значення додаються;
– якщо менша цифра стоїть перед більшою (в цьому випадку вона не може повторюватися), то числове значення меншої цифри віднімається від числового значення більшої.

Наприклад:

$\mathrm{VI} = 6 = 5 + 1,$

$\mathrm{IV} = 4 = 5 - 1,$

$\mathrm{XL} = 40 = 50 - 10,$

$\mathrm{LX} = 60 = 50 + 10,$

$\mathrm{LXX} = 70 = 50 + 10 + 10,$

$\mathrm{LXXX} = 80 = 50 + 10 + 10 + 10,$

$\mathrm{XC} = 90 = 100 - 10,$

$\mathrm{XXVIII} = 28 = 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1,$

$\mathrm{XXXIX} = 39 = 10 + 10 + 10 + (10 - 1),$

$\mathrm{CCCXCVII} = 397 = 100 + 100 + 100 + (100 - 10) + 5 + 1 + 1,$

$\mathrm{MDCCCXVIII} = 1818 = 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1.$

Найбільше число, яке можна записати у римській нумерації за допомогою її вузлових чисел, буде таким:

$$\text{MMMDDDCCCLLLXXXVVVIII} =$$
$$= 3 \cdot 1000 + 3 \cdot 500 + 3 \cdot 100 + 3 \cdot 50 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 4\,998.$$

Про походження римських цифр достовірні відомості відсутні, але відомо, що римська система нумерації склалася приблизно у II–I століттях до н. е., коли Римська імперія досягла найвищого рівня розвитку культури.

Хоча знаки римської нумерації (цифри) схожі на букви, доведено, що вони виникли на італійському ґрунті задовго до появи там алфавіту. Такої думки дотримується історик Т. Моммзен[11], який уважає, що римські числові знаки, всупереч поширеній думці, не походять від букв алфавіту.

У римській нумерації виразно простежуються сліди п'ятіркової системи числення. Однак, у мові римлян (латинській) ніяких слідів п'ятіркової системи виявити не вдається. Тому цілком слушною є думка, що цифри могли бути лише запозичені римлянами в іншого народу (ймовірно, що в етрусків).

Дробові числа. Стародавній людині поряд із лічбою доводилося ділити деякі предмети на рівні частини та вимірювати певні величини. Це привело до появи дробів.

У найдавніших пам'ятках математичної культури стародавнього Єгипту і народів Дворіччя вже фігурує поняття дробу. Очевидно, першими в усіх народів виникли найпростіші дроби виду $\frac{1}{n}$ (так звані *аліквотні*, від лат. *aliquot* – кілька), що були результатом поділу цілого на рівні частини, і тільки згодом, у результаті вимірювання величин, з'явилися дроби загального виду $\frac{m}{n}$.

[11] *Хрістіан Матіас Теодор Моммзен* (1817–1903) – німецький історик, філолог та юрист, удостоєний Нобелівської премії з літератури (1902) за багатотомну працю «Римська історія», почесний громадянин Риму.

Поняття дробу формувалося і входило в ужиток ще важче, ніж поняття натурального числа. На першій стадії свого розвитку дроби мали конкретно-якісний характер як певні частини деяких одиниць вимірювання. Наприклад, у стародавньому Єгипті за одиницю вимірювання площі брали *сеат*[12]. Спочатку символом $\times$ позначали тільки четверту частину сеата і лише згодом ним стали користуватися для позначення абстрактного дробу $\frac{1}{4}$. Збагачення практики вимірювання, оперування з його результатами привело до поступового абстрагування від вимірюваної величини і, врешті-решт, до розуміння дробу як абстрактного числового поняття.

З історичних пам'яток, які дійшли до нас, можна зробити висновок, що стародавні єгиптяни користувалися тільки аліквотними дробами і як виняток дробом $\frac{2}{3}$, для якого застосовували спеціальне позначення. Усі інші дроби подавали як суму аліквотних дробів і, при потребі, дробу $\frac{2}{3}$.

Наприклад:

$$\frac{4}{5} = \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}; \qquad \frac{2}{7} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} \text{ і т.д.}$$

Це дуже утруднювало обчислення з дробами і, мабуть, гальмувало розвиток єгипетської математики в цілому.

Запис звичайних дробів у вигляді суми аліквотних зустрічаємо також в інших народів і в значно пізніші часи у країнах Близького Сходу, в Індії тощо.

У стародавніх народів Дворіччя десь у III тисячолітті до н. е. на базі *шістдесяткової напівпозиційної* системи числення виникли *шістдесяткові* (*сексагезимальні*) системні дроби[13], аналогічні сучасним десятковим.

Це було значним досягненням в обчислювальній математиці тих часів. Шістдесяткові дроби поширилися і надовго закріпилися не тільки

[12] *Сеат* – площа квадрата зі стороною 100 ліктів.

[13] *Секунда* (міра часу) – 1/60 частина хвилини; *хвилина* – 1/60 частина години; *година* – 1/24 частина доби.

Секунда (міра кута) – 1/60 частина хвилини; *хвилина* – 1/60 частина градуса; *градус* – 1/360 частина круга, де $360 = 6 \cdot 60$.

в математиці, а й в астрономічних обчисленнях. Ними користувалися в стародавній Греції, згодом – на Близькому Сході та в Середній Азії, Індії, Європі аж до виникнення десяткових дробів.

Звичайні дроби загального вигляду $\dfrac{m}{n}$ уперше були введені і набули великого поширення у стародавній Греції, але тодішні математики трактували їх виключно як відношення натуральних чисел, а не як числа спеціального виду. Тільки в роботах Діофанта[14] дроби вперше визнавалися числами.

У подальшому звичайні дроби поступово вдосконалювалися в Індії, операції над ними почали розглядатися фактично із сучасних позицій. Явно стала простежуватися тенденція до об'єднання множини натуральних і дробових чисел в одну числову множину – додатних раціональних чисел.

Після завоювання Індії та інших країн Сходу (починаючи з VII–VIII ст.) араби успадкували математичні знання цих народів. Арабська мова стала офіційною і науковою мовою на підкорених територіях. Але серед арабських математиків[15] звичайні дроби загального виду не набули великого поширення. Навпаки, тут спостерігається захоплення аліквотними дробами аж до XV ст.

В Європу відомості про звичайні дроби почали проникати, в основному, починаючи з XII ст. в результаті появи перекладів математичних творів з арабської мови на латинську. Вчення про звичайні дроби європейці засвоювали досить важко, про що свідчить те, що впродовж тривалого часу не було вироблено загальних правил виконання операцій над дробами і їхнього запису. Оволодіння мистецтвом виконання операцій над звичайними дробами вважалося ознакою високої математичної освіченості, оскільки такі операції

[14] *Діофант Александрійський* (між 200 та 214 рр. – між 284 та 298 рр.) – давньогрецький математик, який жив в Александрії.

[15] Термін «*арабські математики*» часто вживався в розумінні «*математики, які писали арабською мовою*» (але які, можливо, були представниками інших народів).

позиціонувалися як операції найвищої складності[16].

Достатню для свого часу ясність у вчення про звичайні дроби вніс С. Стевін[17] у книзі «Арифметика», надрукованій у 1585 р.

У Росії звичайні дроби загального виду почали застосовуватися з XVI ст. Враховуючи те, що у багатьох народів дроби називалися ламаними числами, автор першого російського підручника з математики Л. П. Магницький[18] також скористався цією назвою.

Десяткові дроби (за аналогією з шістдесятковими) виникли на базі десяткової позиційної системи числення. Вперше їх застосування зафіксовано у Китаї не пізніше III ст. н. е., але достатнього розвитку вони тут не набули. Перший досить систематичний для свого часу виклад учення про десяткові дроби було зроблено самаркандським астрономом і математиком аль-Каші[19] в книзі «Ключ до арифметики» (1427).

Проте праці аль-Каші та інші твори, що містили вчення про десяткові дроби, в Європі довгий час залишалися невідомими, тому тут ці дроби «перевідкрили» знову. У 1585 р. С. Стевін видав невеличку брошуру (всього 7 сторінок) під назвою «Децималь», в якій подав систематичний виклад учення про десяткові дроби. Але загального поширення десяткові дроби набули лише починаючи з XVIII ст., коли прийоми виконання й запису обчислень з ними набули сучасної форми.

---

[16] До нас дійшло німецьке прислів'я з тих часів «*потрапити в дроби*» («in die Brüche gehen»), яке означає «*зайти в безвихідь, закінчитись крахом*».

[17] *Сімон Стевін* (1548–1620?) – фламандський математик, інженер-винахідник.

[18] *Леонтій Пилипович Магницький* (1669–1739) – видатний російський математик-самоучка, який створив першу російську енциклопедію з математики («Арифметика, сиречь наука числительная с разных диалектов на славенский язык переведеная и во едино собрана, и на две книги разделена»). За цією книгою вчилося не одне покоління школярів.

[19] *аль-Каші* (1380–1429) – повне ім'я *Джамшид ібн Мас'уд ібн Махмуд Гіяс ад-Дін аль-Каші* – видатний середньоазіатський математик і астроном XV ст., один із керівників Самаркандської обсерваторії. Його покровителем був царственний принц і вчений Улугбек (1393-1449), онук тюркського завойовника Тамерлана (Тимура).

Ірраціональні числа. Поняття ірраціонального числа виникло значно пізніше, ніж поняття натурального числа і дробу, й було пов'язано з вимірюванням величин.

Недостатність множини додатних раціональних чисел для потреб математики, зокрема геометрії, вперше гостро відчули вчені стародавньої Греції (піфагорійська школа) ще в V ст. до н. е. після відкриття *несумірних* величин. Для числового вираження відношень цих величин раціональні числа виявилися непридатними.

У результаті теоретична частина метричної геометрії й учення про подібність були поставлені під сумнів. Грецькі вчені тих часів були неспроможні дійти висновку, що відношення несумірних величин слід розглядати як числа нової природи. Замість *арифметизації* відношень несумірних величин (тобто введення нових, ірраціональних чисел) математики стародавньої Греції пішли по шляху *геометризації* відношень як сумірних, так і несумірних величин.

Перші ірраціональні вирази, з якими довелося мати справу грецьким математикам, були квадратичні. Усі ці вирази подавалися ними у вигляді геометричних образів – відрізків, прямокутників, а *перетворення над ними здійснювались також у геометричній формі*.

У IV ст. до н. е. знаменитий грецький математик Евдокс[20] створив загальну теорію відношень, виклавши її геометричною мовою. Теорія Евдокса й досі вражає своєю строгістю і логічністю викладу, оригінальністю ідеї, глибина якої була повною мірою усвідомлена лише в XIX ст.: напрацювання Евдокса по суті передвістили побудову Р. Дедекіндом[21] теорії дійсних чисел у 1876 р.

Проте теорія Евдокса мала дуже істотний недолік: вона була непридатною для безпосереднього використання на практиці, зокрема в математичних обчисленнях. Тому вона мало сприяла формуванню

---

[20] *Евдокс Кнідський* (бл. 408 – бл. 355 рр. до н. е.) – давньогрецький математик і астроном, який народився в Кніді, на південному заході Малої Азії.

[21] *Юліус Вільгельм Ріхард Дедекінд* (1831–1916) – німецький математик, відомий роботами з абстрактної алгебри й основ дійсних чисел.

поняття ірраціонального числа. З сучасної точки зору ця теорія (про яку ми знаємо з твору Евкліда[22] «Початки») була першим чудовим зразком обґрунтування поняття дійсного числа.

Хоч ірраціональні числа вперше заявили про себе в теоретичній частині математики, усвідомлення їх як чисел, і притому рівноправних з числами раціональними, прийшло, в основному, завдяки інтенсивній обчислювальній практиці. Спочатку математики Індії, а потім і Близького Сходу, розвиваючи обчислювальні методи в алгебрі, астрономії, тригонометрії й постійно зустрічаючись з ірраціональними величинами, визнали ірраціональні числа як рівноправні з уже існуючими.

Про адекватність геометричної несумірності і арифметичної ірраціональності вже досить упевнено твердить Насір Ад-Дін ат-Тусі[23]: «Кожне з відношень може бути назване числом, вимірюваним одиницею, так само, як попередній член відношення вимірюється наступним членом». Аналогічні узагальнення висловлювались і раніше, наприклад, Омаром Хайямом[24].

В європейській математичній літературі поняття ірраціонального числа зустрічається в роботі Леонардо Пізанського[25] «Книга про абак» (1202) і поступово набуває загального визнання. Серед європейських математиків С. Стевін один із перших у друкованому вигляді висловив думку про принципову рівноправність раціональних та ірраціональних чисел.

---

[22] *Евклід* (бл. 365 – бл. 300 рр. до н. е.) – давньогрецький математик, автор першого теоретичного трактату з математики.

[23] *Насір Ад-Дін ат-Тусі* (1201–1274) – повне ім'я *Насир ад-Дін Абу Джафар Мухаммад ібн Мухаммад ат-Тусі* – перський учений-енциклопедист, математик.

[24] *Омар Хайям* (1048–1131) – повне ім'я *Гіяс ад-Дин Абуль Фатх ібн Ібрахім Омар Хайям Нішапурі* – перський поет, філософ, математик, астроном, астролог. Відомий у всьому світі завдяки своїм *рубаї*.

[25] *Леонардо Пізанський* (бл. 1170 – бл. 1250) – італійський математик, більше відомий як *Фібоначчі*, автор математичних трактатів, завдяки яким Європа довідалася про застосовувану індійцями позиційну систему числення, відому зараз як арабська нумерація.

Розвиток обчислювальної математики (зокрема, вчення про десяткові дроби), створення початків аналітичної геометрії, диференціального й інтегрального числення в XVII ст. стимулювали розвиток ідеї ірраціонального числа, яке стало вже просто необхідним у новій на той час математиці змінних величин.

У 70-х роках XVII ст. Ісаак Ньютон[26] у книзі «Загальна арифметика» (1707) проголосив загальну концепцію дійсного числа: «Під числом ми розуміємо не стільки множину одиниць, скільки відособлене відношення якої-небудь величини до іншої величини того самого роду, прийнятої нами за одиницю. Число буває трьох видів: ціле, дробове та ірраціональне. Ціле число є те, що вимірюється одиницею; дробове – кратною частиною одиниці; ірраціональне число несумірне з одиницею». Таке розуміння ідеї дійсного числа залишалося аж до другої половини XIX ст., коли було здійснено логічний аналіз і перегляд усіх числових систем.

Від'ємні числа. На відміну від натуральних і дробових чисел від'ємні числа виникли в результаті потреб самої математики, а саме, у процесі розвитку теорії розв'язування алгебраїчних рівнянь.

Як зазначалося вище, в Єгипті, Вавилоні й Греції були відомі лише додатні раціональні числа. Першими до ідеї від'ємного числа прийшли китайські математики понад дві тисячі років тому. Проте повного розвитку поняття від'ємного числа у них не набуло, бо вони розглядали тільки операції додавання й віднімання від'ємних чисел, а операції множення і ділення не застосовували.

У дуже недосконалій формі ідея від'ємного числа фігурує в Діофанта при знаходженні добутків, наприклад, такого вигляду $(2x-3)(2x-3)$. Розглядаючи різниці $a-b$, де зменшуване завжди більше за від'ємник, він поділяв компоненти на «*додавані*» і «*віднімані*» числа, тобто зменшувані та від'ємники відповідно, і фактично сформулював правило знаків при множенні від'ємних чисел: «*віднімане число,*

[26] *Ісаак Ньютон* (1643–1727) – видатний англійський учений, який заклав основи сучасного природознавства, творець класичної фізики.

помножене на віднімане, дає додаване, а віднімане на додаване дає віднімане». Але від'ємних чисел як таких Діофант усе ж не визначив.

Починаючи з V–VI ст. н. е., поняття від'ємного числа стали широко застосовувати математики Індії. Вони ввели позначення для додатних і від'ємних чисел, сформулювали правила дій над ними, знаходження як додатних, так і від'ємних коренів рівнянь, запропонували конкретні тлумачення додатних і від'ємних чисел (як майно і борг). Проте ідея повноправного абстрактного від'ємного числа формується в індійській математиці повільно. У XII ст. н. е. індійський математик Бхаскара[27] зазначав, що «*люди не схвалюють абстрактних від'ємних чисел*».

В Європі перші згадки про від'ємні числа (потрактовані як борг) зустрічаються в роботах Леонардо Пізанського (Фібоначчі). Згодом європейські математики стали краще розуміти суть від'ємних чисел, але чітке уявлення про їхню природу формувалося дуже повільно. Зокрема, німецький математик М. Штіфель[28] уважав, що «*нуль міститься між справжніми і абсурдними числами*».

Рішучим кроком у становленні поняття від'ємного числа було видання у 1637 р. «Геометрії» Р. Декарта[29], де додатні й від'ємні числа дістали геометричне тлумачення як точки на числовій осі. Це значно сприяло визнанню від'ємних чисел і розумінню їхньої природи. Проте ще й у XVIII ст. точилися суперечки з приводу того, чи є від'ємні числа такими ж реальними об'єктами, як числа додатні. Тільки в першій половині XIX ст., коли було побудовано строгу теорію від'ємних чисел, вони дістали загальне визнання як абстрактні числа.

[27] *Бхаскара* (1114–1185) – індійський математик і астроном (очільник астрономічної обсерваторії в Удджайні), якого зазвичай називають Бхаскара II, щоб відрізнити від іншого індійського вченого Бхаскари I (бл. 600 – бл. 680).

[28] *Міхаель Штіфель* (1487–1567) – німецький математик, один із винахідників логарифмів, активний діяч протестантської Реформації.

[29] *Рене Декарт* (1596–1650) – французький філософ, фізик, фізіолог, математик, засновник аналітичної геометрії. Запровадив систему координат (що відома зараз як *декартова*), поняття *змінної величини* і *функції*, ввів багато алгебраїчних позначень.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Підготуйте *предметну* презентацію на тему:

1. Від'ємні числа в культурній історії людства.
2. Виникнення і розвиток дробових чисел.
3. Системи нумерації в Індії та Китаї.
4. Розвиток уявлень про ірраціональне число в Давній Греції.
5. Шістдесяткова система числення та її сучасні залишки.
6. Системи нумерації за часів давньої Русі.

Підготуйте *персоніфіковану* презентацію на тему:

1. Математичні ідеї Омара Хайяма.
2. Рене Декарт і його система координат.
3. Леонтій Магницький і його «Арифметика».
4. Алгебраїчні ідеї Мухаммада ал-Хорезмі.
5. Евдокс Кнідський – творець теорії відношень.
6. Фібоначчі та його числова послідовність.

Підготуйте *хронологічну* презентацію на тему:

1. Ключові дати в розвитку поняття числа до нової ери.
2. Ключові дати в розвитку поняття числа в I–X ст.
3. Ключові дати в розвитку поняття числа в XI–XV ст.
4. Ключові дати в розвитку поняття числа в XVI–XXI ст.

ПРОБЛЕМНО-ПОШУКОВІ ЗАВДАННЯ

1. Серед завдань, поданих у розділі 4, вкажіть ті, що пов'язуються з прийомами лічби, якими користувалися у давні часи.
   Ґрунтуючись на матеріалі запропонованого історичного нарису та історико-математичних фактах, викладених у джерелах з історії математики, підготуйте презентаційні есеї про історичні корені прийомів і засобів лічби та оперування невід'ємними цілими числами.
2. Охарактеризуйте принцип утворення назв дворозрядних чисел, проілюстрований у завданні 10 з розділу 4, а також властивості натуральних чисел, використані у цьому завданні.

Література з історії математики*

1. *Беллюстин В. К.* Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики: общедоступные очерки для любитетелй математики / *В. К. Беллюстин.* – Изд. 3-е. – М.: ЛКИ, 2007. – 208 с. – [Физико-математическое наследие: математика (история математики)].
2. *Бородін О. І.* Історія розвитку поняття про число і системи числення / *О. І. Бородін.* – Вид. 2-е. – К.: Радянська школа, 1978. – 104 с.
3. *Бубнов Н. М.* Происхождение и история наших цифр. Палеографическая попытка / *Н. М. Бубнов.* – М.: Либроком, 2011. – 200 с. – [Физико-математическое наследие: математика (история математики)].
4. *Вівальнюк Л. М.* Числові системи: навчальний посібник / *Л. М. Вивальнюк, В. К. Григоренко, С. С. Левіщенко.* – К.: Вища школа, 1988. – 272 с.
5. *Выгодский М. Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире / *М. Я. Выгодский.* – [Изд. 2-е, испр. и доп.]. – М.: Наука, 1967. – 370 с.
6. *Глейзер Г. И.* История математики в школе : пособие для учителей / *Г. И. Глейзер.* – [ред. *В. Н. Молодший*]. – М.: Просвещение, 1964. – 376 с.
7. *Депман И. Я.* История арифметики: пособие для учителей / *И. Я. Депман.* – [2-е изд., испр.]. – М.: Просвещение, 1965. – 416 с.
8. Как появились арабские цифры для позиционной записи чисел? // *Носовский Г. В.* Великая Смута. Конец Империи / *Г. В. Носовский, А Т. Фоменко.* – М.: Астрель: ЛСГ, 2007. – С. 153–165.
9. *Матвиевская Г. П.* Развитие учения о числе в Европе до XVII века / *Г. П. Матвиевская*; отв. ред. *С. Х. Сираждинов.* – М.: Либроком, 2012. – 231 с. – [Физико-математическое наследие: математика (история математики)].
10. *Матвиевская Г. П.* Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке / *Г. П. Матвиевская.* – Изд. 2. – М.: Либроком, 2012. – 344 с. – [Физико-математическое наследие: математика (история математики)].
11. Энциклопедия для детей. – Т. 11. Математика / *М. Д. Аксенова* [гл. ред.]. – М.: Аванта+, 1999. – 688 с.

* **Зауваження**. Усі джерела, зазначені у списку, оцифровані та доступні в мережі Internet для вільного ознайомлення.

1.2. РІЗНІ ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ МНОЖИНИ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ

1.2.1. Побудова арифметики невід'ємних цілих чисел на теоретико-множинній основі

Порядкові й кількісні натуральні числа

Натуральними вважаються числа 1, 2, 3, 4, 5, ...

Невід'ємними цілими вважаються числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

На практиці натуральні числа виконують *дві функції*. Вони використовуються для: 1) *лічби* предметів; 2) *визначення* їх *кількості* у довільній сукупності.

Лічба предметів характеризує можливу послідовність (порядок) їхнього розташування (в ряд) у деякій скінченній сукупності. При лічбі предмети іменуються: *перший*, *другий*, *третій* і т.д. Такі найменування прийнято називати *порядковими числами*.

Утворення послідовності предметів деякої сукупності з наступним їх перелічуванням із застосуванням порядкових чисел – *спосіб лічби*, що застосовувався з давніх-давен і увійшов у повсякдення під назвою «*нумерація*».

За допомогою лічби не тільки послідовно *нумерують* предмети деякої сукупності та знаходять номер останнього з предметів цієї сукупності, а й *визначають* їхню загальну *кількість*. Зокрема, поступово виділяючи з послідовності предметів обраної сукупності *один*, *два*, *три* і т.д. предметів і таким чином доходячи до останнього з них, узнають *кількість предметів* вихідної сукупності.

Числа, що вживаються для характеристики кількості предметів у довільній сукупності (*один*, *два*, *три* і т.д.), прийнято називати *кількісними числами*.

Утім, кажучи, що деяка сукупність містить, наприклад, 19 (*дев'ятнадцять*) предметів, ми тим самим стверджуємо також і те, що:

– в ній обов'язково знайдеться предмет, який при лічбі буде вважатися *першим*[30];

– яким би чином при лічбі не утворювалися послідовності предметів цієї сукупності, *останній* з них завжди буде іменуватися як *дев'ятнадцятий*.

Для іменування кількісних і порядкових чисел використовують самостійну частину мови – *числівник* – за допомогою якої позначають кількість предметів або їхній порядок при лічбі[31] і яка відповідає на запитання скільки? котрий?

Теорію натуральних чисел як кількісних характеристик сукупностей предметів можна побудувати, абстраґуючись від процесу лічби. Основні ідеї такої побудови відомі як *кількісна теорія натурального числа* і вперше були викладені німецьким математиком Г. Кантором[32].

Рівнопотужні множини, класи еквівалентності та невід'ємні цілі числа

Нехай задано сукупність множин A, B, C, ... , які є підмножинами деякої універсальної множини $\mathfrak{U}$ і серед яких є й порожня множина $\varnothing$.

Як відомо, порожня множина $\varnothing$ єдина і не містить жодного елемента. Тому будемо вважати, що вона визначає окремий клас «0», тобто:

$\varnothing \to 0.$

Серед інших множин сукупності знайдемо множину $\{\, \varnothing \,\}$ і виділимо в окремий клас «1» усі множини, рівнопотужні їй, тобто:

$\{\, \varnothing \,\} \sim \{\, a \,\} \sim \{\, b \,\} \sim \ \ldots \to 1.$

---

[30] Див.: Упорядковані множини // Математика : навч. посібник для напряму підготовки 6.010102 «Початкова освіта» пед. навч. закладів : у 3 ч. Ч. I / М. М. Левшин, Є. О. Лодатко ; за заг. ред. Є. О. Лодатка. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2012. – С. 74–81.

[31] Звичайно, смислові можливості числівника як частини мови значно ширші за суто математичні тлумачення кількості й порядку, що обмежуються рядом невід'ємних цілих чисел.

[32] *Георг Фердинанд Людвіг Філіпп Кантор* (1845–1918) – німецький математик, відомий як творець теорії множин, що стала наріжним каменем у математиці.

Знаходячи далі серед «залишків» сукупності множину $\{\varnothing; \{\varnothing\}\}$, виділимо в окремий клас «2» усі множини, рівнопотужні узятій, тобто:

$\{\varnothing; \{\varnothing\}\} \sim \{a; b\} \sim \{b; c\} \sim \ \ldots \to 2.$

Продовжуючи, аналогічно отримаємо класи множин «3», «4» й т.д.:

$\{\varnothing; \{\varnothing; \{\varnothing\}\}\} \sim \{a; b; c\} \sim \{b; c; d\} \sim \ \ldots \to 3;$

$\{\varnothing; \{\varnothing; \{\varnothing; \{\varnothing\}\}\}\} \sim \{a; b; c; d\} \sim \{b; c; d; e\} \sim \ \ldots \to 4;$

$\ldots$

Таким чином прийдемо до розбиття $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$ множини $\mathfrak{U}$ на класи еквівалентності, кожен з яких утворюється сукупністю рівнопотужних множин.

Отримане розбиття будемо далі називати множиною *невід'ємних цілих чисел* і позначати $\boldsymbol{N}_0$, записуючи, що:

$$\boldsymbol{N}_0 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}.$$

Із зазначеного вище випливає, що *невід'ємне ціле число* може мислитися як *кількісна характеристика класу еквівалентності*, який утворюється рівнопотужними множинами із множини $\mathfrak{U}$.

Тоді має місце таке означення.

Означення 1. *Невід'ємним цілим числом* називається клас рівнопотужних скінченних множин, серед яких окремий клас 0 утворюється єдиною порожньою множиною.

Відношення на множині невід'ємних цілих чисел

У теорії множин символом $n(A)$ зазвичай позначається *кількість* елементів множини A. Отже, якщо A – одна з множин деякого класу рівнопотужних скінченних множин, то $a = n(A)$ слід тлумачити як позначення цього класу. Тоді, за сформульованим вище визначенням, $a = n(A)$ буде невід'ємним цілим числом.

Звертаючись до класів рівнопотужних множин, що конструювалися вище, та керуючись відомим визначенням поняття «*підмножини*», запишемо співвідношення між ними

$$\varnothing \subset \{\varnothing\} \subset \{\varnothing; \{\varnothing\}\} \subset \{\varnothing; \{\varnothing; \{\varnothing\}\}\} \subset \{\varnothing; \{\varnothing; \{\varnothing; \{\varnothing\}\}\}\} \subset \ldots,$$

а також те, що

$0 = n(\varnothing)$;

$1 = n(\{\varnothing\})$;

$2 = n(\{\varnothing; \{\varnothing\}\})$;

$3 = n(\{\varnothing; \{\varnothing; \{\varnothing\}\}\})$;

$4 = n(\{\varnothing; \{\varnothing; \{\varnothing; \{\varnothing\}\}\}\})$;

$\ldots$

Виходячи зі співвідношень та останніх позначень, а також враховуючи той факт, що відношення $\subset$ є транзитивним, можемо ввести поняття «менше» і «більше» на множині $\boldsymbol{N}_0$ класів рівнопотужних множин.

Нехай A, B, C, ... – *різні класи* рівнопотужних скінченних множин із множини $\boldsymbol{N}_0$ і кожен з цих класів визначає певне невід'ємне ціле число $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$, $\ldots$ Тоді, виходячи з можливих співвідношень між цими класами (або множинами, що їм належать), можемо ввести кілька важливих означень.

Означення 2. Якщо два класи A і B такі, що $A \subset B$, то кажуть, що невід'ємне ціле число $a = n(A)$ *менше* від невід'ємного цілого числа $b = n(B)$ і позначають це так: $a < b$.

Означення 3. Якщо два класи A і B такі, що $A \supset B$, то кажуть, що невід'ємне ціле число $a = n(A)$ *більше* за невід'ємне ціле число $b = n(B)$ і позначають це так: $a > b$.

Означення 4. Якщо C_1 і C_2 – дві множини, що належать класу C рівнопотужних множин, то кажуть, що невід'ємне ціле число $c_1 = n(C_1)$ *дорівнює* невід'ємному цілому числу $c_2 = n(C_2)$ і позначають це так: $c_1 = c_2$.

Беручи за основу означення 2 і 3, а також зважаючи на тлумачення поняття «рівності» невід'ємних цілих чисел в означенні 4, можна ввести ще одне поняття – «нерівності» невід'ємних цілих чисел, яке в узагальненому вигляді доволі часто використовується в математиці.

Означення 5. Якщо два класи A і B такі, що $A \subset B$ або $A \supset B$, то кажуть, що невід'ємне ціле число $a = n(A)$ *не дорівнює* невід'ємному цілому числу $b = n(B)$ і позначають це так: $a \neq b$.

Інакше: невід'ємні цілі числа $a = n(A)$ і $b = n(B)$ можна вважати *не рівними* і позначати цей факт як $a \neq b$, якщо $a < b$ або $a > b$.

Застосовуючи поняття «більше» (або «менше») до множини $\boldsymbol{N}_0$ невід'ємних цілих чисел (як класів рівнопотужних множин) і виходячи з ланцюжка співвідношень $\varnothing \subset \{\varnothing\} \subset \{\varnothing; \{\varnothing\}\} \subset \ldots$, запишемо, що $0 < 1 < 2 < 3 < \ \ldots$.

Таке «розташування» елементів множини $\boldsymbol{N}_0$ прийнято називати її *впорядкуванням* і пов'язувати з ним також послідовність порядкових чисел: *нульовий*, *перший*, *другий*, *третій*, ...

Операції на множині невід'ємних цілих чисел

Нехай $\boldsymbol{N}_0$ – множина невід'ємних цілих чисел, елементами якої є числа $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$, ... , що визначають кількісні характеристики кожного з класів рівнопотужних множин, яким належать множини A, B, C, ...

Отже, маємо:

$$A \sim \{\underbrace{\varnothing; \{\varnothing; \{\varnothing; \{\ldots}_{n(A)}\}\}\}\}; \qquad B \sim \{\underbrace{\varnothing; \{\varnothing; \{\varnothing; \{\ldots}_{n(B)}\}\}\}\};$$

$$C \sim \{\underbrace{\varnothing; \{\varnothing; \{\varnothing; \{\ldots}_{n(C)}\}\}\}\}; \qquad \ldots$$

Зважаючи на те, що множини A, B, C, ... є <u>представниками</u> класів рівнопотужних множин, зауважимо, що за необхідності вони можуть обиратися (серед множин свого класу) так, щоб:

– усі вони попарно не перетиналися;

– деякі з них попарно не перетиналися.

Додавання й віднімання невід'ємних цілих чисел можуть бути охарактеризовані (визначені) в межах теоретико-множинного підходу, ґрунтуючись на об'єднанні й різниці множин.

Нехай множини A і B такі, що $A \cap B = \varnothing$. Тоді (як відомо з теорії множин) для них *існує єдина множина* $C = A \cup B$, кількість елементів якої буде

$$n(C) = n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Якщо скористатися позначеннями $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$, то остання рівність набуде вигляду: $c = a + b$.

Означення 6. Додаванням невід'ємних цілих чисел a і b можна називати операцію, яка за кількістю елементів $a = n(A)$ і $b = n(B)$ двох множин (таких, що $A \cap B = \varnothing$) дозволяє знаходити кількість $c = n(A \cup B)$ елементів їхнього об'єднання:

$$c = a + b.$$

Існування суми чисел та її єдиність безпосередньо випливають з існування та єдиності об'єднання множин: які б не були множини A та B, завжди існує і причому єдина множина C така, що $C = A \cup B$.

Беручи до уваги, що кожній множині M відповідає одне й тільки одне невід'ємне ціле число $m = n(M)$, яке характеризує кількість її елементів, можемо стверджувати, що кількість елементів множини $C = A \cup B$ визначається однозначно, тобто єдиним буде число $c = a + b$:

$$c = n(C) = n(A \cup B) = n(A) + n(B) = a + b.$$

Властивості додавання

1°. $a + 0 = a$;

2°. $a + b = b + a$;

3°. $a + (b + c) = (a + b) + c$.