МАТЕМАТИКА

ПОВНІ РОЗВ’ЯЗКИ ЗАВДАНЬ
ДЛЯ ДЕРЖАВНОЇ ПІДСУМКОВОЇ АТЕСТАЦІЇ

9 КЛАС

Частина четверта

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я72
М34

У посібнику подано детальні розв'язання 80 варіантів завдань четвертої частини, які виконують тільки учні класів з поглибленим вивченням математики, зі збірника, рекомендованого Міністерством освіти і науки України для проведення державної підсумкової атестації з математики в 9-х класах загальноосвітніх навчальних закладів (Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 9 клас / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — К.: Центр навч.-метод. л-ри, 2014).

Посібник покликаний допомогти вчителеві здійснювати оперативний контроль знань під час тематичних атестацій, заліків, опитувань, а також полегшити перевірку виконання екзаменаційних завдань. Книга стане у пригоді учням 9-х класів, які готуються до державної підсумкової атестації (подані розв'язки мають рекомендаційний характер).

Для вчителів, учнів, абітурієнтів.

2005000004049

ВАРІАНТ 1

Частина четверта

4.1. $\sqrt{x-1}(x^2-(3+a)x+3a)=0$; $\begin{cases} x=3,\ x=a; \\ x\ge 1 \end{cases}$ або $x=1$.

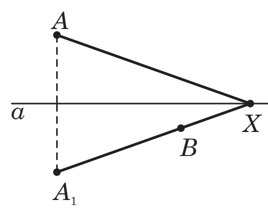
Тому при $a\le 1$ або $a=3$ є два розв'язки системи, а при $a>1$ і $a\ne 3$ — три розв'язки.

Відповідь. при $a\le 1$ або $a=3$ є два розв'язки системи, а при $a>1$ і $a\ne 3$ — три розв'язки.

4.2. $\left|\frac{x+2}{x}\right|(x^2-4x-5)\le 5$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-4x-5\le 0, \\ x\ne 0; \end{cases} \\ x+2=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in[-1;5], \\ x\ne 0; \end{cases} \\ x=-2; \end{array}\right.$

Відповідь. $x=-2$, $x\in[-1;0]\cup(0;5]$.

4.3. A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої a. Тоді будуємо точку X, яка є точкою перетину прямих a і A_1B. Точка X — шукана. Може трапитися ситуація, коли точки A_1 і B співпадуть. Тоді за точку X можна прийняти будь-яку точку з прямої a.



ВАРІАНТ 2

Частина четверта

4.1. $(\sqrt{x}-a)(9x-16)=0$; $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=a; \\ \begin{cases} 9x-16=0, \\ x\ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$ Отже, якщо $a<0$ або $a=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$ — система має єдиний розв'язок.

Відповідь. $a<0$ або $a=\frac{4}{3}$.

4.2. $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2)=18x^2$; $(x^2+x-20)(x^2+8x-20)=18x^2$;

Оскільки $x=0$ не є коренем даного рівняння, то поділимо обидві частини рівняння на x^2: $\left(x+1-\frac{20}{x}\right)\left(x+8-\frac{20}{x}\right)=18.$ Зробимо заміну: $x+1-\frac{20}{x}=a$;

$a(a+7)=18$; $a^2+7a=-18$; $a_1=2$, $a_2=-9$.

1) $x+1-\frac{20}{x}=2$; $x^2-x-20=0$; $x_1=5$; $x_2=-4$.

2) $x+1-\dfrac{20}{x}=-9$; $x^2+10x-20=0$; $x_{3,4}=\dfrac{-10\pm\sqrt{180}}{2}$; $x_3=-5-3\sqrt{5}$,

$x_4=-5+3\sqrt{5}$. *Відповідь.* 5, –4, $-5-3\sqrt{5}$, $-5+3\sqrt{5}$.

4.3. Оскільки $AM : MB = 2 : 1$, то $x_M=\dfrac{1\cdot(-1)+2\cdot 8}{3}=5$; $y_M=\dfrac{1\cdot 5+2\cdot 2}{3}=3$.

Рівняння прямої AB: $\dfrac{x+1}{9}=\dfrac{y-5}{-3}$; $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{14}{3}$.

Кутовий коефіцієнт прямої, яка перпендикулярна до знайденої, має задовольняти рівність: $k\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-1$; $k=3$.

Тому шукане рівняння прямої матиме вигляд: $y=3(x-5)+3$; $y=3x-12$.

Відповідь. $y=3x-12$.

ВАРІАНТ 3

Частина четверта

4.1. $x^2-(a^2-5a)x+4a-1=0$. За теоремою Вієта маємо: $\begin{cases}a^2-5a=-6,\\ D\ge 0;\end{cases}$

$\begin{cases}a^2-5a+6=0,\\ (a^2-5a)^2-4(4a-1)\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}a_1=2,\ a_2=3,\\ (a^2-5a)^2-4(4a-1)\ge 0.\end{cases}$

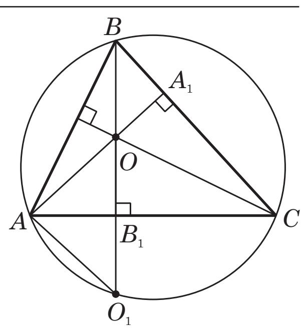
1) $a=2$: $(a^2-5a)^2-4(4a-1)=(2^2-5\cdot 2)^2-4(4\cdot 2-1)=36-28=8>0$;

2) $a=3$: $(a^2-5a)^2-4(4a-1)=(3^2-5\cdot 3)^2-4(4\cdot 3-1)=36-44=-8<0$.

Відповідь. $a=2$.

4.2. Шукані числа можуть закінчуватися цифрами 1, 3, 5, 7. Інші шість цифр шуканого числа можна утворити 6! способами. Тоді шукана кількість чисел становитиме $4\cdot 6!=2880$. *Відповідь.* 2880.

4.3. O — ортоцентр трикутника ABC, O_1 — точка перетину висоти BB_1 з описаним навколо ΔABC колом. Доведемо, що $OB_1=O_1B_1$.
$\angle CBO_1=\angle CAO_1$ як кути, що спираються на одну і ту саму дугу CO_1. Тому $\angle CBO_1=\angle CAO_1=90°-\angle C$. А тому $\angle CAA_1=CAO_1$. Звідси AC — бісектриса $\angle A_1AO_1$, а тому O і O_1 — точки, симетричні відносно прямої AC.
Аналогічно розглядаються випадки, коли трикутник прямокутний і тупокутний.



ВАРІАНТ 39

Частина четверта

4.1. За теоремою Вієта $x_1x_2 = -\frac{2}{3}$; $x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$.

Тому $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{40}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{10}.$

Відповідь. $\frac{2}{3}\sqrt{10}$.

4.2. $\frac{3}{(x+3)(x-1)} - \frac{4}{(x-2)(x+4)} = -\frac{1}{2}$; $\frac{3}{x^2+2x-3} - \frac{4}{x^2+2x-8} = -\frac{1}{2}$.

Нехай $x^2 + 2x - 3 = a$. Тоді $\frac{3}{a} - \frac{4}{a-5} = -\frac{1}{2}$; ОДЗ: $a \neq 0$, $a \neq 5$.

$\frac{6a - 30 - 8a + a^2 - 5a}{a(a-5)} = 0$; $\frac{a^2 - 7a - 30}{a(a-5)} = 0$; $a^2 - 7a - 30 = 0$; $a_1 = 10$, $a_2 = -3$.

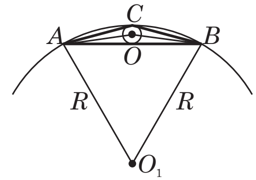
1) $x^2 + 2x - 3 = 10$; $x^2 + 2x - 13 = 0$; $x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{14}}{2}$;

$x_1 = -1 + \sqrt{14}$; $x_2 = -1 - \sqrt{14}$.

2) $x^2 + 2x - 3 = -3$; $x^2 + 2x = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = -2$.

Відповідь. $-1 + \sqrt{14}$; $-1 - \sqrt{14}$; 0; –2.

4.3. $AB = R$. За теоремою синусів у ΔACB маємо: $\frac{AB}{\sin\angle ACB} = 2R$; $\sin\angle ACB = \frac{1}{2}$. Оскільки центри вписаного і описаного кіл лежать по різні боки від AB, то $\angle ACB = 150°$.



Центр вписаного кола лежить на перетині бісектрис. Тому $\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC) =$

$= 180° - \frac{1}{2} \cdot 30° = 165°$.

Відповідь. 165°.

ВАРІАНТ 40

Частина четверта

4.1. Функція визначена на всій множині дійсних чисел, якщо підкореневий вираз (квадратний тричлен) невід'ємний для всіх $x \in R$. 1) $a \geq 3$;

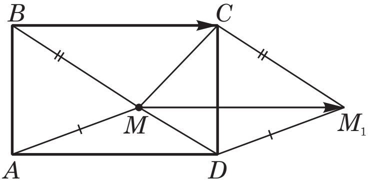
2) $D = (6 - 2a)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (a - 3) = 4a^2 - 24a + 36 - 20a + 60 = 4a^2 - 44a + 96 \leq 0$;

$a^2 - 11a + 24 \leq 0$; $x \in [3; 8]$.

Відповідь. [3; 8].

4.2. З нерівності $|a|-|b| \le |a-b|$ маємо: $\left||x+1|-|x-1|\right| \le |x+1-x+1| = 2$.

4.3. Побудуємо точку M_1 — образ точки M при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{BC}$.
$MM_1 = BC = AD$, $CM_1 = BM$, $DM_1 = AM$. Отже, чотирикутник MCM_1D — шуканий.



ВАРІАНТ 41

Частина четверта

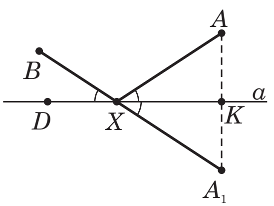
4.1. $\sqrt{x-2}\left(x^2-(5+a)x+5a\right)=0$; $\sqrt{x-2}\,(x-5)(x-a)=0$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-5)(x-a)=0,\\ x\ge 2;\end{cases}\\ x=2.\end{array}\right.$

Відповідь. При $a \le 2$ або $a = 5$ рівняння має два розв'язки; при $a > 2$ або $a \ne 5$ рівняння має три розв'язки.

4.2. $\left|\dfrac{x-5}{x}\right|\left(x^2-x-12\right)\le 0$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-x-12\le 0,\\ x\ne 0;\end{cases}\\ x-5=0.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3\le x<0,\\ 0<x\le 4;\end{cases}\\ x=5.\end{array}\right.$

Відповідь. $[-3;0)\cup(0;4]\cup\{5\}$.

4.3. Нехай A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої a. Тоді точка X перетину прямих a і BA_1 є шуканою. Справді $\angle AXK = \angle KXA_1$, оскільки XK — бісектриса кута AXA_1, а $\angle KXA_1 = \angle BXD$ як вертикальні.



ВАРІАНТ 42

Частина четверта

4.1. $\left(\sqrt{x}-a\right)(4x-9)=0$; $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=a,\\ \begin{cases}4x-9=0,\\ x\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$

4.2. $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x-1)(x+4)}=\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+3x-4}=\dfrac{1}{4}$.

ОДЗ: $x \neq -4$, $x \neq -2$, $x \neq -1$, $x \neq 1$.

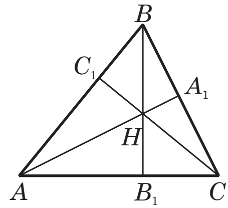
Зробимо заміну: $x^2 + 3x - 1 = a$. Тоді: $\dfrac{1}{a+3}+\dfrac{1}{a-3}=\dfrac{1}{4}$;

$\dfrac{4\cdot(a-3+a+3)-a^2+9}{a^2-9}=0$; $\dfrac{a^2-8a-9}{a^2-9}=0$; $a_1 = 9$; $a_2 = -1$.

1) $x^2 + 3x - 1 = 9$; $x^2 + 3x - 10 = 0$; $x_1 = -5$, $x_2 = 2$.

2) $x^2 + 3x - 1 = -1$; $x^2 + 3x = 0$; $x_3 = 0$, $x_4 = -3$. *Відповідь.* –5; –3; 0; 2.

4.3. У ΔABC точка H — точка перетину висот, AA_1, BB_1, CC_1 — висоти трикутника.



$\angle A_1HB = \angle AHB_1$ як вертикальні, тому $\angle A_1BH = \angle B_1HA = 90° - \angle AHB_1$. Аналогічно $\angle C_1BH = 90° - \angle CHB_1$. Звідси $\angle ABC = \angle A_1BH + \angle C_1BH = 180° - (\angle AHB_1 + \angle CHB_1) = 180° - \angle AHB$. (1)

За теоремою синусів з ΔABC радіус кола, описаного навколо ΔABC, дорівнює $R_1=\dfrac{AC}{2\sin\angle ABC}$.

За теоремою синусів з ΔAHC радіус кола, описаного навколо ΔAHC, дорівнює $R_2=\dfrac{AC}{2\sin\angle AHC}$. Але $\sin(180° - \angle AHB) = \sin\angle AHB = \sin\angle ABC$.

Тому $R_1 = R_2$. Аналогічно доводиться рівність радіусів кіл описаних навколо ΔCHB і ΔBHA.

ВАРІАНТ 80

Частина четверта

4.1. $(a+5)x^2+(2a+10)x+3\geq 0$.

При $a = -5$ маємо $3 > 0$, тобто дана функція визначена на множині дійсних чисел.

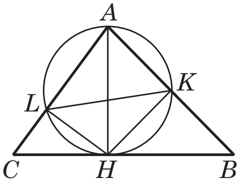
При $a \neq -5$ даний квадратний тричлен приймає лише невід'ємні значення, якщо:

$\begin{cases}a+5>0,\\ D\leq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}a+5>0,\\ (2a+10)^2-12(a+5)\leq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}a>-5,\\ 2(a+5)^2-12(a+5)\leq 0;\end{cases}$

$\begin{cases}a>-5,\\ (a+5)(a+2)\leq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}a>-5,\\ -5\leq a\leq -2;\end{cases}$ $a\in(-5;\,2]$. *Відповідь.* (–5; 2].

4.2. Для доведення даної нерівності використаємо нерівність $|a|-|b| \le |a-b|$.
Маємо: $|x+4|-|x-1| \le |x+4-x+1| = 5$.

4.3. Чотирикутник $AKHL$ — вписаний, оскільки $\angle HLA = \angle HKA = 90°$.



$\angle LKH = \angle KAH$, бо спираються на одну і ту саму дугу LH.
$\angle LKH = \angle KAH = 90° - \angle ACB$.
$\angle BKL = \angle BKH + \angle LKH = 90° + 90° - \angle ACB =$
$= 180° - \angle ACB$.
Отже, $\angle BKL + \angle ACB = 180°$.
Аналогічно $\angle CLK + \angle KBC = 180°$.
Отже, сума протилежних кутів чотирикутника $CLKB$ дорівнює 180°, а тому цей чотирикутник можна вписати в коло.