Т. П. Гой, О. В. Махней

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
напрямів підготовки
«фізика», «прикладна фізика»

Видання друге, виправлене та доповнене

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г 59

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист №1/11-5297 від 13.03.2013 р.)

Рецензенти:

Гасюк І. М., доктор фізико-математичних наук, професор (Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника),

Сторож О. Г., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський національний університет ім. Івана Франка),

Тацій Р. М., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

Гой Т. П.

Г59 Диференціальні та інтегральні рівняння : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. — Вид. 2-ге, випр. та доп. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. — 360 с.

ISBN 978-966-10-3530-9

У посібнику у вигляді курсу лекцій викладено основи теорії звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь, а також деякі споріднені питання (рівняння з частинними похідними першого порядку, основи стійкості розв'язків рівнянь, елементи варіаційного числення). Автори намагались поєднати строгість викладу матеріалу теорії диференціальних та інтегральних рівнянь з прикладним спрямуванням її методів, наводячи для цього численні приклади з фізики, механіки, інших наук. Кожна лекція супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування.

Для студентів напрямів підготовки «фізика», «прикладна фізика». Може бути корисним для студентів технічних напрямів підготовки.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

ISBN 978-966-10-3530-9

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні та інтегральні рівняння й методи дослідження їхніх розв'язків широко використовуються у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Саме тому навчальна дисципліна «Диференціальні та інтегральні рівняння» займає чільне місце у підготовці спеціалістів з фізики, механіки, електроніки, хімії, матеріалознавства, біології, машинобудування тощо.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з диференціальних та інтегральних рівнянь для студентів напрямів підготовки «фізика», «прикладна фізика», але може бути використаний також студентами інженерно-технічних вищих навчальних закладів.

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу з допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник має вигляд курсу з 24 лекцій, які умовно можна поділити на 7 розділів: «Звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи звичайних диференціальних рівнянь», «Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку», «Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь», «Інтегральні рівняння», «Основи варіаційного числення».

Те, що авторами названо «лекціями», можна вважати ними умовно — передовсім через обсяг, який не завжди відповідає двом академічним годинам, а також через нерівномірно розподілений матеріал. Насправді, термін «лекція» — це радше певний тематично об'єднаний матеріал, який може бути основою для справжньої лекції та відповідного практичного заняття.

Важливі поняття, теореми, методи ілюструються прикладами та задачами. Кінець розв'язаних прикладів і задач позначається символом ■, але у тих випадках, де було ймовірним «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу чи задачі.

Кожна лекція супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми (у поєднанні з іншими збірниками). Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.

У другому виданні виправлено помічені недоліки і помилки та оновлено рекомендовану літературу.

Сподіваємось, що цей посібник допоможе студентам в оволодінні важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.

Усі критичні зауваження, рекомендації й побажання з вдячністю будуть сприйняті авторами та враховані для покращення змісту наступних видань посібника. Усю інформацію просимо надсилати на e-mail: tarasgoy@yahoo.com, makhney1@yahoo.com.

Розділ 1
ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Лекція 1. Поняття про диференціальні рівняння. Приклади задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь

План

1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь.

2. Основні означення й поняття.

3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих.

1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь. Використання математичних моделей є одним з найбільш ефективних методів вивчення різноманітних фізичних процесів і явищ. Математичні моделі допомагають зрозуміти фізичний процес, дають можливість установити якісні та кількісні характеристики його стану, з їх використанням можна передбачити подальший розвиток процесу без натуральних експериментів, проведення яких у багатьох випадках є надто дорогим або просто неможливим.

Вивчаючи фізичні явища, не завжди вдається безпосередньо знайти закони або формули, які пов'язують між собою величини фізичного процесу, але часто можна виявити певну функціональну залежність між невідомими характеристиками процесу, швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять похідні невідомих характеристик процесу. Такі рівняння називають ***диференціальними***, а знаходження невідомої функції (розв'язку) — ***інтегруванням*** диференціального рівняння.

Розв'язування задачі дослідження певного фізичного явища чи процесу можна розділити на два етапи:

1. Складання диференціального рівняння, яке при певних припущеннях описує сутність явища чи процесу.

2. Знаходження розв'язку диференціального рівняння, тобто функціональної залежності між величинами, які характеризують фізичне явище.

Для складання диференціальних рівнянь природничих наук використовують фізичний зміст першої та другої похідних, а також додаткові умови та закони, притаманні конкретній галузі науки, такі як-от:

– другий закон Ньютона[1)] ($F = ma$, де m — маса тіла, a — прискорення руху, F — сума сил, що діють на тіло);

– закон всесвітнього тяжіння ($F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$, де m_1, m_2 — маси двох тіл, r — відстань між ними);

– закон Кірхгофа (алгебрична сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю);

– закон Фур'є ($q = -\lambda(T)\frac{dT}{dx}$, де q — питомий потік теплоти, $\lambda(T)$ — коефіцієнт теплопровідності середовища, $\frac{dT}{dx}$ — швидкість зміни температури T);

– закон Ньютона про охолодження тіла (швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла та середовища);

– закон розчинення речовини (швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину у певний момент часу);

– закон Гука (сила пружності пружини пропорційна її видовженню) тощо.

Питання про відповідність математичної моделі й реального явища вивчається на основі аналізу результатів досліду та їх порівняння з поведінкою розв'язку одержаного диференціального рівняння.

Зауважимо, що багато розділів фізики значною мірою можна розглядати як різні розділи теорії диференціальних рівнянь. Перш за все це виявляється в аналітичній механіці, яку багато вчених розглядають як математичну дисципліну. Основним апаратом сучасної теоретичної фізики також є диференціальні рівняння.

[1)] Бібліографічні дані про вчених, прізвища яких зустрічаються у посібнику, можна знайти на с. 348–354.

Розглянемо декілька прикладних задач, які приводять до диференціальних рівнянь.

Задача 1. Матеріальна точка P рухається по прямій, яку приймемо за вісь x, і в момент часу t займає положення x (рис. 1.1). Відома швидкість руху $v(t)$. Знайти закон руху точки, тобто залежність x від t, $x = x(t)$, якщо відомо, що у момент часу $t = t_0$ точка P займає положення $x = x_0$.

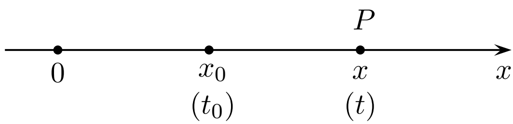

Рис. 1.1

Розв'язання. З курсу математичного аналізу відомо, що швидкість точки у момент часу t дорівнює похідній $x'(t)$ (фізичний зміст похідної), тобто

$$x'(t) = v(t). \tag{1.1}$$

Співвідношення (1.1) є диференціальним рівнянням руху точки P і задає закон її руху в диференціальній формі. Інтегруючи рівняння (1.1), одержуємо:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + C, \tag{1.2}$$

де C — довільна стала (стала інтегрування).

За умовою задачі, $x(t_0) = x_0$. Підставляючи в (1.2) $x = x_0$ і $t = t_0$, одержуємо, що $C = x_0$. Отже, шуканим розв'язком (рухом) є

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + x_0. \blacksquare$$

Задача 2. Куля, рухаючись зі швидкістю $v_0 = 400$ м/с, пробиває стіну товщиною $h = 0{,}2$ м і вилітає з неї зі швидкістю

$v_1 = 100$ м/с. Вважаючи, що сила опору стіни пропорційна квадрату швидкості кулі, знайти тривалість руху кулі у стіні.

Розв'язання. Згідно з другим законом Ньютона $ma = F$, де m — маса кулі, $a = \frac{dv}{dt}$ — її прискорення (похідна швидкості v за часом t), F — сила, яка діє на кулю. За умовою задачі, $F = -kv^2$, де знак мінус указує на те, що сила опору стіни спрямована у бік, протилежний до напряму швидкості кулі. Отже, маємо диференціальне рівняння

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2. \tag{1.3}$$

З (1.3) одержуємо:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\int dt + C \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{v} = -\frac{k}{m}t + C \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m}{kt - Cm}.$$

З умови $v(0) = v_0 = 400$ знаходимо $C = -\frac{1}{400}$, а тому

$$v = \frac{400m}{400kt + m}. \tag{1.4}$$

Якщо тепер підставити у рівняння (1.4) $t = T$ (T — шуканий час), а також $v = v_1 = 100$, то

$$\frac{400m}{400kT + m} = 100 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{3k_1}{400},$$

де позначено $k_1 = m/k$. Сталу k_1 знайдемо з рівняння (1.4), яке, враховуючи, що $v = \frac{dx}{dt}$, запишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = \frac{400k_1}{400t + k_1}.$$

Звідси

$$x = \int \frac{400k_1}{400t + k_1}dt + C \quad \Rightarrow \quad x = k_1 \ln(400t + k_1) + C.$$

Якщо $t = 0$, то $x = 0$ (куля входить у стіну), а тому $C = -k_1 \ln k_1$. Якщо $t = T$, то $x = h = 0{,}2$ (куля вилітає зі стіни), а тому, враховуючи, що $T = 3k_1/400$, одержуємо:

$$0{,}2 = k_1 \ln 4k_1 - k_1 \ln k_1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{0{,}2}{\ln 4}.$$

Таким чином,

$$T = \frac{3k_1}{400} = \frac{3 \cdot 0{,}2}{400 \ln 4} \approx 0{,}001 \text{ с. } \blacksquare$$

Задача 3. Визначити форму дзеркала, яке збирає в одну точку спрямований на нього потік паралельних променів.

Розв'язання. Зробимо переріз дзеркала площиною Oxy, щоб точка, в яку збираються промені (фокус), була початком координат, а вісь Ox — паралельною до променів, які падають на дзеркало. У перерізі одержуємо деяку криву $y = f(x)$ (рис. 1.2).

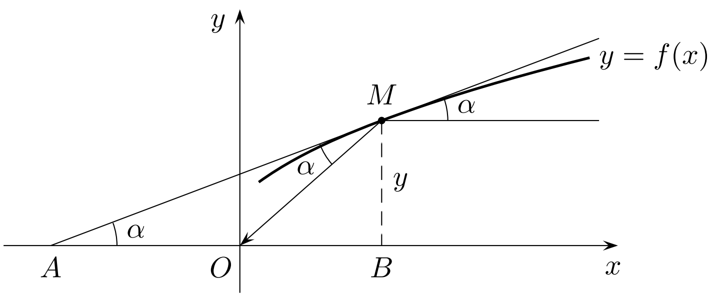

Рис. 1.2

Використаємо закон геометричної оптики, згідно з яким кут падіння променя дорівнює куту його відбиття (на рисунку цей кут позначено через α). Нехай $M(x, y)$ — довільна точка кривої $y = f(x)$. Проведемо у цій точці дотичну MA до кривої $y = f(x)$. Трикутник MOA — рівнобедрений. Оскільки $y' = \operatorname{tg} \alpha$ (геометричний зміст похідної), то, вважаючи, що $y > 0$, одержуємо

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

або, якщо помножити чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{x^2+y^2}-x$,

$$y' = \frac{1}{y}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right). \tag{1.5}$$

Диференціальне рівняння (1.5) описує форму перерізу дзеркала площиною Oxy. З (1.5) одержуємо:

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = 1 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x^2+y^2} = x + C,$$

де C — довільна стала. Таким чином, маємо рівняння осьового перерізу дзеркала площиною Oxy: $y^2 = 2Cx + C^2$. З геометричної точки зору одержали сім'ю парабол з вершинами у точках $(-C/2; 0)$. Отже, поверхня дзеркала як поверхня обертання осьового перерізу навколо осі Ox має вигляд

$$y^2 + z^2 = 2Cx + C^2,$$

тобто шукані форми дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання. ■

Зауважимо, що якщо параболічне дзеркало, рівняння якого отримане у задачі 3, спрямувати на сонце, то усі відбиті промені проходитимуть через фокус, де матимемо високу температуру (звідки і латинська назва focus — вогнище). Параболічні дзеркала використовують також у радіолокації.

Задача 4. Знайти закон розпаду радію, якщо відомо, що швидкість розпаду прямо пропорційна його масі і через 1600 років початкова маса радію зменшиться вдвічі.

Розв'язання. Нехай m_0 — початкова маса радію, $m(t)$ — маса радію у момент часу t. Швидкість розпаду радію як швидкість зміни функції є похідною цієї функції. Отже, закон розпаду можна записати у вигляді диференціального рівняння

$$m'(t) = -k\,m(t), \tag{1.6}$$

де $k > 0$, k — коефіцієнт пропорційності (знак мінус вказує на те, що маса радію з часом зменшується, а тому $m'(t) < 0$).

Диференціальне рівняння (1.6) разом з умовою $m(0) = m_0$ є математичною моделлю розпаду радію. Розв'яжемо це рівняння, враховуючи, що $m'(t) = \frac{dm}{dt}$:

$$\frac{dm}{dt} + km = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{m} + k dt = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad d(\ln m + kt) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln m + kt = C_1 \quad \Rightarrow \quad m = e^{C_1 - kt}.$$

Оскільки C_1 — довільна стала, то можна позначити e^{C_1} через C. Отже,

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

За умовою задачі, $m(0) = m_0$, а тому $C = m_0$. З умови $m(1600) = 0{,}5\, m_0$ знаходимо коефіцієнт k:

$$m(1600) = m_0 e^{-1600k} \quad \Rightarrow \quad 0{,}5\, m_0 = m_0 e^{-1600k} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{1600} \approx 0{,}00043.$$

Отже, закон зміни маси радію від часу наближено подається формулою

$$m(t) = m_0 e^{-0{,}00043t}. \ \blacksquare$$

2. Основні означення й поняття. ***Звичайним диференціальним рівнянням*** називають співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.7}$$

між незалежною змінною x, шуканою функцією $y = y(x)$ і похідними $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Позначення, які використані в означенні, не є суттєвими: незалежна змінна може позначатися через t, шукана функція — через s, f, F тощо.

Порядком звичайного диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної невідомої функції, яка входить у рівняння.

У рівнянні n-го порядку (1.7) вважається, що похідна n-го порядку шуканої функції справді входить у це рівняння, а наявність решти аргументів необов'язкова.

Наведемо приклади звичайних диференціальних рівнянь:

$$y = xy' + y'^3, \quad y'' + y = \cos x,$$
$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 2y' + y = xe^x, \quad y^{(10)} = x.$$

Перше з наведених рівнянь має перший порядок, друге рівняння — другий порядок, третє рівняння — четвертий порядок, четверте — десятий порядок.

Якщо диференціальне рівняння містить частинні похідні невідомої функції від кількох незалежних змінних, то його називають ***рівнянням з частинними похідними***. Наведемо приклади таких рівнянь:

$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ — рівняння, яке описує рух частинок за інерцією;

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ — рівняння, яке описує закон поширення у часі та розподілу за довжиною температури нагрітого стержня;

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ — рівняння, яке описує різноманітні коливальні процеси;

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x, y, z)$ — рівняння, якому задовольняє потенціал $u(x, y, z)$ електростатичного поля, де $\rho(x, y, z)$ — густина зарядів.

Надалі, якщо не буде сказано про інше, розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння, причому як незалежну змінну, так і шукану функцію вважатимемо дійсними.

Розв'язком рівняння (1.7) на деякому інтервалі (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, називають функцію $y = y(x)$, яка має на цьому інтервалі похідні до порядку n включно та задовольняє рівняння (1.7). Це означає, що для всіх $x \in (a, b)$ справджується тотожність

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) \equiv 0.$$

Наприклад, функція $y = e^x$ є розв'язком диференціального рівняння другого порядку $y'' - y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Окрім неї, розв'язками цього рівняння, як легко перевірити, є також $y = e^{-x}$, $y = 3e^x$, $y = 3e^x + 4e^{-x}$ і, взагалі, всі функції вигляду $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Нижче буде встановлено, що звичайне диференціальне рівняння n-го порядку у загальному випадку має сім'ю розв'язків, залежну від n довільних сталих. Наприклад, усі розв'язки диференціального рівняння $y^{(n)} = 0$ містяться у формулі $y = C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$, де $C_1, \ldots, C_n$ — довільні сталі.

З геометричної точки зору розв'язку диференціального рівняння у прямокутній системі координат відповідає деяка крива, яку називають ***інтегральною кривою***. Сукупність інтегральних кривих, залежну від довільних сталих, називають ***сім'єю інтегральних кривих***. Наприклад, розв'язки рівняння $y'' = 2$ утворюють двопараметричну сім'ю парабол $y = x^2 + C_1x + C_2$, кожна з яких є інтегральною кривою.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають ***інтегруванням*** цього рівняння. Якщо при цьому всі розв'язки вдається виразити через елементарні функції або у ***квадратурах*** (коли розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій), то кажуть, що рівняння зінтегроване ***у скінченному вигляді***. Розглядатимемо в основному саме такі рівняння, хоча значно більше диференціальних рівнянь не інтегруються у скінченному вигляді й для представлення їхніх розв'язків доводиться використовувати більш складний математичний апарат.

Основною задачею теорії інтегрування диференціального рівняння є знаходження всіх його розв'язків та дослідження їхніх властивостей.

3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих. Нехай маємо рівняння сім'ї кривих, залежної від одного дійсного параметра C:

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{1.8}$$

Побудуємо диференціальне рівняння сім'ї кривих (1.8), тобто рівняння, яке описує властивості, притаманні всім кривим цієї сім'ї. Для цього здиференціюємо за змінною x обидві частини рівності (1.8), враховуючи, що $y = y(x)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.9}$$

Якщо співвідношення (1.9) не містить C, то воно буде виражати ту загальну властивість, яка притаманна усім кривим сім'ї (1.8) (наприклад, якщо $y = x + C$, то $y' = 1$). У загальному випадку рівність (1.9) залежатиме від параметра C. Тоді, виключаючи цей параметр із системи (1.8), (1.9), одержимо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.10}$$

Рівняння (1.10) виражає спільну властивість кривих (1.8) незалежно від сталої C, його називають ***диференціальним рівнянням сім'ї кривих*** (1.8).

Приклад 1. Знайти диференціальне рівняння сім'ї парабол, які проходять через початок координат і мають осі симетрії, паралельні до осі ординат.

Розв'язання. Сім'ю парабол з умови задачі можна описати з допомогою формули $y = x^2 - Cx$, де C — довільна стала. Складемо систему

$$\begin{cases} y = x^2 - Cx, \\ y' = 2x - C \end{cases}$$

і виключимо з неї сталу C. Для цього знайдемо C з першого рівняння системи і підставимо у друге:

$$C = \frac{x^2 - y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = 2x - \frac{x^2 - y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^2 + y}{x}.$$

Відповідь: $xy' = x^2 + y$.

Аналогічно, маючи сім'ю кривих

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

залежну від n довільних сталих, можна при певних умовах одержати диференціальне рівняння, для якого згадані криві будуть інтегральними. Для цього потрібно здиференціювати співвідношення $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ n разів за змінною x і виключити з нього та отриманих унаслідок диференціювання n рівнянь сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$. У результаті одержимо диференціальне рівняння сім'ї кривих, яке виражатиме загальну властивість цих кривих.

Приклад 2. Знайти диференціальне рівняння сім'ї усіх кіл з одиничним радіусом на площині.
Розв'язання. Рівнянням усіх кіл з радіусом 1 і з центром у довільній точці площини (C_1, C_2) є

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1. \tag{1.11}$$

Двічі здиференціюємо (1.11):

$$2(x - C_1) + 2(y - C_2)y' = 0,$$
$$1 + y'^2 + (y - C_2)y'' = 0.$$

Виключаючи тепер із системи

$$\begin{cases} (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1, \\ x - C_1 + (y - C_2)y' = 0, \\ 1 + y'^2 + (y - C_2)y'' = 0 \end{cases}$$

сталі $C_1,\ C_2$, одержуємо:

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y'\right)^2 + \left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(1 + y'^2\right)^3 = y''^2. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: [7, с. 6–12], [8, с. 4–8], [16, с. 6–15], [18, с. 3–13, 22–25], [19, с. 9–19], [21, с. 4–8].

Питання до лекції 1

1. Яке рівняння називають звичайним диференціальним рівнянням? Чим відрізняються звичайні диференціальні рівняння від рівнянь з частинними похідними?
2. Як визначити порядок диференціального рівняння?

3. Яку функцію називають розв'язком диференціального рівняння? Як називають операцію знаходження розв'язків диференціального рівняння?

4. Яку криву називають інтегральною кривою диференціального рівняння?

5. У чому полягає основна задача теорії інтегрування диференціального рівняння?

6. У чому полягає математичне моделювання реальних фізичних процесів, яка його роль у вивченні процесу? Наведіть приклади використання диференціальних рівнянь для математичного моделювання фізичних процесів та явищ.

7. Який вигляд має рівняння сім'ї кривих, залежних від одного параметра (n параметрів)? Як знайти диференціальне рівняння заданої сім'ї однопараметричних кривих (n-параметричних кривих)?

Вправи до лекції 1

1. Перевірте, чи є функції

$$\text{а) } y = \cos x + \sin x + 5e^{-x}; \quad \text{б) } y = x \cdot \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt; \text{ в) } y = 3x + \ln x + 2$$

розв'язками відповідних диференціальних рівнянь

$$\text{а) } y' + y = 2\cos x; \quad \text{б) } xy' = y + x\sin x; \quad \text{в) } x^2 y'' \ln x - xy' + y = 0.$$

2. Знайдіть криві, в яких кожний відрізок дотичної, який лежить між координатними осями, точкою дотику ділиться навпіл.

3. Складіть диференціальне рівняння сім'ї кривих:

$$\text{а) } x^2 + y^2 = C; \quad \text{б) } y = \cos(x + C); \quad \text{в) } y = C_1 x^2 + C_2 e^x.$$

4. Складіть диференціальне рівняння:

а) усіх кіл, які дотикаються до осі абсцис;

б) усіх прямих на площині;

в) парабол, які проходять через точку (1; 2) і мають вісь, паралельну до осі абсцис.

5. Знайдіть криві, нормалі до яких в усіх точках проходять через початок координат.