

Т. П. Гой, О. В. Махней

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
напрямів підготовки
«інформатика», «прикладна математика»

Видання друге, виправлене та доповнене



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г 59

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту
України (лист № 1/11-12145 від 22.12.2011)*

Рецензенти:

Іванчов М. І., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський національний університет ім. Івана Франка),

Каленюк П. І., доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет «Львівська політехніка»),

Мойсичин В. М., доктор технічних наук, професор (Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу)

Гой Т. П.

Г59 Диференціальні рівняння : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. — Вид. 2-ге, випр. та доп. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. — 360 с.

ISBN 978-966-10-3529-3

У посібнику викладено основи теорії звичайних диференціальних рівнянь, а також деякі споріднені питання (рівняння з частинними похідними першого порядку, основи стійкості розв'язків рівнянь). Автори намагались поєднати строгість викладу матеріалу теорії диференціальних рівнянь з прикладним спрямуванням її методів, наводячи для цього численні приклади з природничих наук. Кожна тема супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування. Наведено також приклади застосування пакета символьних обчислень Maple для інтегрування диференціальних рівнянь.

Для студентів напрямів підготовки «інформатика», «прикладна математика». Може бути корисним для студентів природничих та інженерно-технічних напрямів підготовки.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

ISBN 978-966-10-3529-3

© Т. П. Гой, О. В. Махней, 2014

© Навчальна книга – Богдан, 2014

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	11
РОЗДІЛ 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ .	13
Лекція 1. Поняття про диференціальні рівняння та диференціальні моделі	13
1. Диференціальні рівняння та математичне моделювання	13
2. Основні означення й поняття	19
3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих	21
Питання до лекції 1	23
Вправи до лекції 1	23
Лекція 2. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної (загальна теорія)	24
1. Основні означення й поняття	24
2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші	25
3. Класифікація розв'язків	27
4. Геометричне та механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків	30
Питання до лекції 2	34
Вправи до лекції 2	35
Лекція 3. Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку, інтегровні у квадратах	36
1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них	36
2. Однорідні рівняння	39
3. Рівняння, звідні до однорідних	42
Питання до лекції 3	46
Вправи до лекції 3	47

Лекція 4. Лінійні диференціальні рівняння та звідні до них	48
1. Лінійне диференціальне рівняння та методи його розв'язування	48
2. Властивості розв'язків лінійних рівнянь	51
3. Рівняння Я. Бернуллі	52
4. Рівняння Ріккаті	56
Питання до лекції 4	58
Вправи до лекції 4	58
Лекція 5. Рівняння у повних диференціалах та звідні до них	59
1. Рівняння у повних диференціалах	59
2. Інтегрувальний множник та деякі способи його знаходження	62
3. Теореми про існування, неєдиність та загальний вигляд інтегрувального множника	66
Питання до лекції 5	69
Вправи до лекції 5	70
Лекція 6. Неявні диференціальні рівняння першого порядку	71
1. Основні означення й поняття	71
2. Задача Коші. Класифікація розв'язків	73
3. Рівняння степеня n	78
Питання до лекції 6	80
Вправи до лекції 6	80
Лекція 7. Неявні диференціальні рівняння першого порядку (продовження)	81
1. Метод введення параметра	81
2. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро	83
3. Задача про ізогональні траєкторії	86
Питання до лекції 7	89
Вправи до лекції 7	90
Лекція 8. Основні властивості розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку	91
1. Принцип стискаючих відображень	91

2. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші	94
3. Продовження розв'язку задачі Коші	99
4. Коректність задачі Коші	101
Питання до лекції 8	102
Вправи до лекції 8	103
Лекція 9. Диференціальні моделі	104
1. Побудова диференціальних моделей природничих наук	104
2. Розв'язування геометричних задач з допомогою диференціальних рівнянь	110
3. Розв'язування задач з допомогою інтегральних рівнянь	111
Питання до лекції 9	113
Вправи до лекції 9	113
Додаток 1. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку	114
РОЗДІЛ 2. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ . .	124
Лекція 10. Диференціальні рівняння вищих порядків	124
1. Основні поняття й означення. Задача Коші	124
2. Класифікація розв'язків	127
3. Рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку n	129
Питання до лекції 10	134
Вправи до лекції 10	135
Лекція 11. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку	136
1. Рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох послідовних похідних	136
2. Рівняння, яке не містить незалежної змінної	139

3. Рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних	141
4. Рівняння з точними похідними	142
Питання до лекції 11	145
Вправи до лекції 11	146

Лекція 12. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку	147
1. Основні означення й поняття	147
2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння	149
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції	150
4. Основна теорема	153
5. Формула Остроградського–Ліувілля	154
Питання до лекції 12	157
Вправи до лекції 12	157

Лекція 13. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами	159
1. Основні означення й поняття	159
2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел	160
3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел	163
4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами	165
Питання до лекції 13	169
Вправи до лекції 13	170

Лекція 14. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку	171
1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння	171
2. Метод варіації довільних сталих	173
3. Метод Коші	175
4. Метод невизначених коефіцієнтів	178
Питання до лекції 14	183

Вправи до лекції 14	183
Лекція 15. Лінійні однорідні рівняння другого порядку	184
1. Канонічна форма лінійного однорідного рівняння другого порядку	184
2. Побудова загального розв'язку у випадку, якщо відомий один частинний розв'язок	186
3. Інтегрування лінійних рівнянь з допомогою степеневих рядів	188
Питання до лекції 15	195
Вправи до лекції 15	195
Лекція 16. Диференціальні моделі коливальних процесів	196
1. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів	196
2. Застосування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів	200
3. Диференціальна модель математичного маятника	204
Питання до лекції 16	206
Вправи до лекції 16	207
Лекція 17. Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку	208
1. Основні означення й поняття	208
2. Існування та єдиність розв'язку крайової задачі	209
3. Функція Гріна крайової задачі	211
4. Крайові задачі на власні значення	215
Питання до лекції 17	218
Вправи до лекції 17	218
Додаток 2. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків	219

РОЗДІЛ 3. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	228
Лекція 18. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)	228
1. Основні означення й поняття	228
2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків	232
3. Зведення диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи й обернена задача	235
4. Лінійні однорідні системи	238
Питання до лекції 18	240
Вправи до лекції 18	241
Лекція 19. Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	242
1. Лінійно залежні та лінійно незалежні сукупності функцій	242
2. Формула Остроградського–Якобі	245
3. Основна теорема	246
4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера	247
Питання до лекції 19	255
Вправи до лекції 19	256
Лекція 20. Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	257
1. Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи	257
2. Метод варіації довільних сталих	259
3. Метод невизначених коефіцієнтів	262
4. Метод Д'Аламбера	266
Питання до лекції 20	267
Вправи до лекції 20	268
Додаток 3. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь	269

РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ 273

Лекція 21. Лінійні однорідні рівняння з частинни- ми похідними першого порядку 273

1. Зв'язок лінійного однорідного рівняння з частинни-
ми похідними першого порядку з відповідною си-
стемою характеристик 273
2. Побудова загального розв'язку лінійного однорід-
ного рівняння 278
3. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння . 280
- Питання до лекції 21 282
- Вправи до лекції 21 283

Лекція 22. Квазілінійні та нелінійні рівняння з ча- стинними похідними першого порядку 284

1. Побудова загального розв'язку квазілінійного рів-
няння першого порядку 284
2. Задачі Коші для квазілінійного рівняння першого
порядку 287
3. Нелінійні рівняння з частинними похідними першо-
го порядку 290
4. Рівняння Пфаффа 293
- Питання до лекції 22 295
- Вправи до лекції 22 296

Додаток 4. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування рівнянь з частинни- ми похідними першого порядку 297

РОЗДІЛ 5. СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕ- РЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 302

Лекція 23. Основи теорії стійкості за Ляпуновим . 302

1. Основні означення й поняття 302
2. Дослідження на стійкість точок спокою 306
3. Стійкість за першим наближенням 308
4. Критерії Рауса–Гурвіца, Л'єнара–Шипара 312
- Питання до лекції 23 313

Вправи до лекції 23	314
Лекція 24. Теорема Ляпунова. Фазова площина . .	315
1. Дослідження на стійкість з використанням функцій Ляпунова	315
2. Класифікація точок спокою автономної системи . .	318
Питання до лекції 24	329
Вправи до лекції 24	329
Додаток 5. Застосування математичного пакета Maple для дослідження на стійкість розв’яз- ків звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем	330
Додаток 6. Основи роботи з математичним паке- том Maple	339
КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЧЕНИХ, ЯКІ ЗГАДУЮТЬСЯ У ПОСІБНИКУ	347
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .	352
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	355

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні рівняння й методи дослідження їхніх розв'язків широко використовують у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Саме тому навчальна дисципліна «Диференціальні рівняння» займає чільне місце у підготовці фахівців з інформатики, математики, прикладної математики тощо.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з диференціальних рівнянь для студентів напрямів підготовки «інформатика», «прикладна математика», але може бути використаний також студентами інженерно-технічних вищих навчальних закладів.

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями теорії диференціальних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу з допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник має вигляд курсу з 24 лекцій, які умовно можна поділити на 5 розділів: «Звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи звичайних диференціальних рівнянь», «Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку», «Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь».

Те, що авторами названо «лекціями», можна вважати ними умовно — передовсім через обсяг, який не завжди відповідає двом академічним годинам, а також через нерівномірно розподілений матеріал. Насправді, термін «лекція» — це радше певний тематично об'єднаний матеріал, який може бути основою для справжньої лекції та відповідного практичного заняття.

Важливі поняття, теореми, методи ілюструються прикладами та задачами. Кінець розв'язаних прикладів і задач позначається символом ■, але у тих випадках, де було ймовірним «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикла-

ду чи задачі.

Знак ► означає завершення доведення теореми.

Кожна лекція супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які у поєднанні з іншими збірниками можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми. Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У додатках до розділів для майже всіх розв'язаних у відповідних темах прикладів наводяться їх розв'язання з допомогою пакета символьних обчислень Maple. З основами роботи з ним читач може ознайомитись у додатку 6.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.

Сподіваємось, що цей посібник допоможе студентам в оволодінні важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.

У другому виданні виправлено помічені недоліки і помилки та оновлено рекомендовану літературу.

Автори висловлюють щиро вдячність рецензентам професорам М. І. Іванчову, П. І. Каленюку, В. М. Мойсину за корисні критичні зауваження й методичні поради, які безумовно сприяли покращенню якості рукопису.

Усі критичні зауваження, рекомендації й побажання з вдячністю будуть сприйняті авторами та враховані для покращення змісту наступних видань посібника. Усю інформацію просимо надсилати на e-mail: tarasgoy@yahoo.com, makhney1@yahoo.com.

Розділ 1

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Лекція 1. Поняття про диференціальні рівняння та диференціальні моделі

План

1. Диференціальні рівняння та математичне моделювання.
2. Основні означення й поняття.
3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довірливих сталих.

1. Диференціальні рівняння та математичне моделювання. Досліджуючи різноманітні фізичні явища, технологічні процеси у багатьох галузях науки і техніки, деякі процеси, які виникають в економіці, екології та інших соціальних науках, не завжди вдається безпосередньо простежити залежність між величинами, що описують певний процес чи явище. Однак у багатьох випадках можна виявити функціональну залежність між визначальними характеристиками процесу (функціями), швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять шукані функції та/або їхні похідні. Такі рівняння називають *диференціальними*, а знаходження невідомої функції (розв'язку) — *інтегруванням* диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння, одержане у процесі дослідження деякого реального явища або процесу, називають *диференціальною моделлю* цього явища, процесу. Диференціальні моделі називають ще *динамічними математичними моделями*. У таких моделях, крім шуканих залежних величин, містяться також похідні шуканих залежностей, наприклад, швидкості, прискорення та ін.

Диференціальні моделі допомагають зрозуміти досліджувані явища і процеси, дають можливість установити якісні та

кількісні характеристики їхніх станів, з використанням моделей можна описати механізм розвитку процесу, а також передбачити його подальший розвиток без натуральних експериментів, проведення яких часто є надто дорогим або просто неможливим.

Диференціальні моделі є важливою складовою математичного моделювання, яке включає в себе не тільки побудову і дослідження математичних моделей, але й створення обчислювальних алгоритмів і програм, що реалізують ці моделі на електронно-обчислювальних машинах.

У процесі побудови диференціальних моделей важливе значення має знання законів тієї області науки, з якою пов'язана природа задачі, що вивчається. Наприклад, у механіці це може бути другий закон Ньютона¹⁾ ($F = ma$, де m — маса тіла, a — прискорення руху тіла, F — сума сил, що діють на тіло); у електротехніці — закон Кірхгофа (алгебрична сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю); у хімії — закон розчинення речовини (швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину у певний момент часу) тощо.

Питання про відповідність математичної моделі й реального явища вивчається на основі аналізу результатів досліду та їх порівняння з поведінкою розв'язку одержаного диференціального рівняння²⁾.

Розглянемо декілька прикладних задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь.

Задача 1. *Знайти закон зростання інформаційних потоків у науці (зростання кількості наукових публікацій), якщо відомо, що швидкість зростання прямо пропорційна досягнутому рівню кількості публікацій. Визначити, за який час*

¹⁾Бібліографічні дані про вчених, прізвища яких зустрічаються у посібнику, можна знайти на с. 347–351.

²⁾Детальніше про диференціальні моделі та методику їх складання йтиметься в лекції 9.

кількість публікацій подвоїться порівняно з початковою кількістю, якщо відносна швидкість зростання складає 7%.

Розв'язання. Нехай $y(t)$ — кількість публікацій у момент часу t , а y_0 — початкова кількість публікацій, тобто $y(0) = y_0$. Швидкість зростання інформаційних потоків як швидкість зміни функції є похідною цієї функції. Отже, закон зростання інформаційних потоків можна записати у вигляді диференціального рівняння

$$y'(t) = k y(t), \quad (1.1)$$

де $k > 0$ — коефіцієнт пропорційності, що характеризує відгуки на публікації у певній галузі знань.

Диференціальне рівняння (1.1) разом з умовою $y(0) = y_0$ є математичною моделлю зростання інформаційних потоків. Розв'яжемо це рівняння, враховуючи, що $y'(t) = \frac{dy}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} - ky = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{y} - kdt = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow d(\ln y - kt) = 0 &\Rightarrow \ln y - kt = C_1 \Rightarrow y = e^{C_1 + kt}, \end{aligned}$$

де C_1 — довільна стала. Якщо перепозначити e^{C_1} через C , то $y(t) = Ce^{kt}$. Оскільки $y(0) = y_0$, то $C = y_0$, тобто шуканий закон зростання інформаційних потоків у науці визначається формулою

$$y(t) = y_0 e^{kt}. \quad (1.2)$$

Знайдемо тепер час T , за який потік наукової інформації у порівнянні з початковою кількістю збільшиться вдвічі. За умовою задачі, відносна швидкість y'/y зростання інформаційних потоків складає 7%, а тому $k = 0,07$. Оскільки $y(T) = 2y_0$, то

$$y(T) = y_0 e^{kT} = 2y_0 \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{0,07} \approx 10 \text{ років. } \blacksquare$$

Відзначимо, що через стримуючі фактори, пов'язані з різними змінами зовнішніх умов, експоненціальний характер зростання потоку наукової інформації зберігатися не може. Зростання рівня обмежується певним його значенням, і механізм

зростання кількості публікацій виражатиметься диференціальним рівнянням

$$y' = ky(M - y),$$

де $k > 0$, M — максимально можливе значення функції y , тобто $0 < y < M$. Розв'яжемо це рівняння. Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y(M-y)} = kdt &\Rightarrow \frac{1}{M} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y} \right) dy - kdt = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow d(\ln y - \ln(M-y) - kMt) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \frac{y}{M-y} = kMt + C_1 \Rightarrow y = \frac{Me^{Mkt+C_1}}{1 + e^{Mkt+C_1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \frac{M}{1 + Ce^{-Mkt}}, \end{aligned}$$

де, враховуючи довільність сталої C_1 , перепозначено e^{-C_1} через C . Надалі у такій ситуації використовуватимемо знак $:=$, наприклад, $C := e^{-C_1}$.

Криву, визначену останнім рівнянням, називають **логістичною кривою**. У початкові моменти часу, коли y значно менше від M , логістична крива практично збігається з графіком показникової функції $y = Me^{Mkt}$. Прямі $y = M$ і $y = 0$ є асимптотами логістичної кривої (на рис. 1.1 побудована логістична крива при $M = 4C = 8k$).

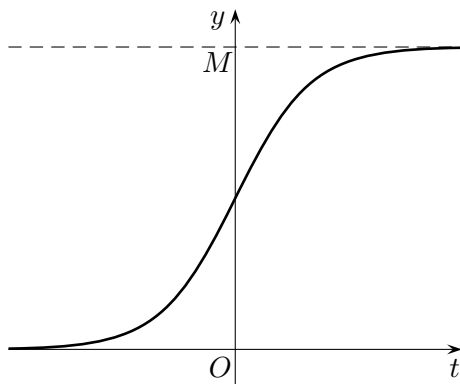


Рис. 1.1

Закон зростання інформаційних потоків, визначений формулою (1.2), є доволі універсальним. Ним можна скористатися для опису процесів радіоактивного розпаду, хімічних реакцій, для розв'язування багатьох задач екології, задачі про ефективність реклами тощо [7, 10, 19, 22]. У банківській справі нарахування заборгованості за кредитом або доходів за вкладом також відбувається відповідно до цього закону, але у цих випадках час відраховується не неперервно, а через дискретні проміжки.

Задача 2. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний квадрату швидкості човна. Початкова швидкість човна 3 м/с, а його швидкість через 4 с складає 1 м/с. Через який час швидкість човна зменшиться до 1 см/с?

Розв'язання. Згідно з другим законом Ньютона $ma = F$, де m — маса човна, $a = \frac{dv}{dt}$ — його прискорення (похідна швидкості $v(t)$ за часом t), F — сила опору води. За умовою задачі, $F = kv^2$. Отже, маємо таке диференціальне рівняння:

$$m \frac{dv}{dt} = kv^2. \quad (1.3)$$

З (1.3) одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v^2} &= \frac{k}{m} dt \quad \Rightarrow \quad d\left(-\frac{1}{v} - \frac{k}{m}t\right) = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -\frac{1}{v} - \frac{k}{m}t &= C \quad \Rightarrow \quad v = \frac{-m}{kt + Cm}. \end{aligned}$$

З умови $v(0) = 3$ знаходимо $C = -1/3$, а тому

$$v(t) = \frac{3m}{m - 3kt}. \quad (1.4)$$

З (1.4), враховуючи, що $v(4) = 1$, одержуємо, що $\frac{3m}{m-12k} = 1$, $\frac{m}{k} = -6$, а отже,

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{3m}{m - 3kt} = \frac{3\frac{m}{k}}{\frac{m}{k} - 3t} = \frac{3(-6)}{-6 - 3t} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad v(t) &= \frac{6}{t + 2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Якщо тепер в (1.5) підставити $t = T$ (T — шуканий час), а також $v = 0,01$, то звідси знаходимо $T = 598$ с. ■

Задача 3. Визначити форму дзеркала, яке збирає в одну точку спрямований на нього потік паралельних променів.

Розв'язання. Зробимо переріз дзеркала площиною Oxy , щоб точка, в яку збираються промені (фокус), була початком координат, а вісь Ox — паралельною до променів, які падають на дзеркало. У перерізі одержуємо деяку криву $y = f(x)$ (рис. 1.2).

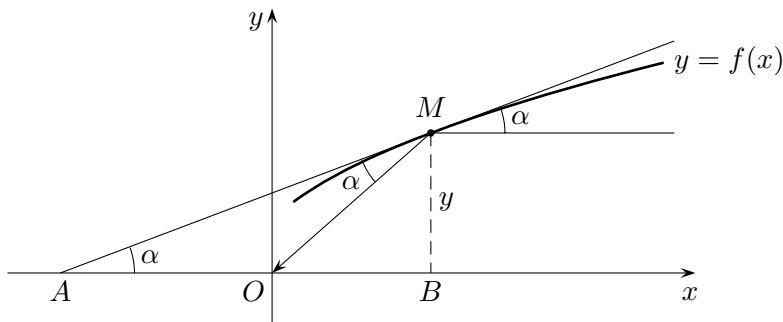


Рис. 1.2

Використаємо закон геометричної оптики, згідно з яким кут падіння променя дорівнює куту його відбиття (цей кут позначено через α). Нехай $M(x, y)$ — довільна точка кривої $y = f(x)$. Проведемо у цій точці дотичну MA . Трикутник MOA — рівнобедрений. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $y > 0$. Оскільки $y' = \operatorname{tg} \alpha$ (геометричний зміст похідної), то одержуємо

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

або, домножуючи чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{x^2 + y^2} - x$,

$$y' = \frac{1}{y} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x \right). \quad (1.6)$$

Диференціальне рівняння (1.6) є диференціальною моделлю задачі й описує форму перерізу дзеркала площиною Oxy . З

(1.6) одержуємо:

$$\begin{aligned}\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1 &\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = x + C,\end{aligned}$$

де C — довільна стала. Отже, маємо рівняння осьового перерізу дзеркала площиною Oxy : $y^2 = 2Cx + C^2$. Одержали сім'ю парабол з вершинами у точках $(-C/2; 0)$, а тому поверхня дзеркала як поверхня обертання осьового перерізу навколо осі Ox має вигляд $y^2 + z^2 = 2Cx + C^2$, тобто шукані форми дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання. ■

2. Основні означення й поняття. *Звичайним диференціальним рівнянням* називають співвідношення

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.7)$$

між незалежною змінною x , шуканою функцією $y = y(x)$ цієї змінної і похідними $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Позначення, використані у наведеному означенні, не є суттєвими: незалежна змінна може позначатися через t , шукана функція — через s , f , φ , F тощо.

Порядком звичайного диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної невідомої функції, яка входить у рівняння. У рівнянні n -го порядку (1.7) вважається, що похідна n -го порядку шуканої функції справді входить у це рівняння, тоді як наявність решти аргументів необов'язкова.

Наведемо приклади звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}y &= xy' + y'^3, & y' + |y'| &= 0, & y'' + y &= \cos x, \\ y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 2y' + y &= xe^x, & y^{(10)} &= x.\end{aligned}$$

Перші два з наведених рівнянь мають перший порядок, третє рівняння має другий порядок, четверте рівняння — четвертий порядок, п'яте — десятий порядок.

Якщо диференціальне рівняння містить частинні похідні невідомої функції від кількох незалежних змінних, то його називають **рівнянням з частинними похідними**. Наведемо приклади таких рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= f(x, y, z).\end{aligned}$$

Надалі, крім лекцій 21 і 22, розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння, причому завжди незалежну змінну і шукану функцію вважатимемо дійсними.

Розв'язком рівняння (1.7) на деякому інтервалі (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, називають функцію $y = y(x)$, яка має на цьому інтервалі похідні до порядку n включно та задовольняє рівняння (1.7). Це означає, що для всіх $x \in (a, b)$ справджується тотожність $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0$.

Наприклад, функція $y = \cos 2x$ є розв'язком диференціального рівняння другого порядку $y'' + 4y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Розв'язками цього рівняння, як легко перевірити, є також $y = \sin 2x$, $y = 3 \cos 2x$, $y = \cos 2x - \sin 2x$ й, узагалі, всі функції $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Нижче буде встановлено, що звичайне диференціальне рівняння n -го порядку у загальному випадку має сім'ю розв'язків, залежну від n довільних сталих. Наприклад, усі розв'язки диференціального рівняння $y^{(n)} = 0$ містяться у формулі $y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n$, де $C_1, \dots, C_n$ — довільні сталі.

З геометричної точки зору розв'язку диференціального рівняння у прямокутній системі координат відповідає деяка крива, яку називають **інтегральною кривою**. Сукупність інтегральних кривих, залежну від довільних сталих, називають **сім'єю інтегральних кривих**. Наприклад, розв'язки рівняння $y'' = 2$ утворюють двопараметричну сім'ю парабол $y = x^2 + C_1 x + C_2$, кожна з яких є інтегральною кривою.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають **інтегруванням** цього рівняння. Якщо при цьому всі розв'язки вдається виразити через елементарні функції або у **квадратурах** (коли розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій), то кажуть, що рівняння зінтегроване **у скінченному вигляді**. Розглядатимемо переважно саме такі рівняння, хоча значно більше диференціальних рівнянь не інтегруються у скінченному вигляді й для представлення їхніх розв'язків доводиться використовувати більш складний математичний апарат.

Основною задачею теорії інтегрування диференціальних рівнянь є знаходження всіх розв'язків заданого диференціального рівняння та дослідження їхніх властивостей.

3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих. Нехай маємо рівняння сім'ї кривих, залежної від одного дійсного параметра C :

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (1.8)$$

Побудуємо диференціальне рівняння сім'ї кривих (1.8), тобто рівняння, яке описує властивості, притаманні всім кривим цієї сім'ї. Для цього здиференціюємо за змінною x обидві частини рівності (1.8), враховуючи, що $y = y(x)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.9)$$

Якщо співвідношення (1.9) не містить C , то воно буде виражати ту загальну властивість, яка притаманна усім кривим сім'ї (1.8) (наприклад, якщо $y = x + C$, то $y' = 1$). У загальному випадку рівність (1.9) залежатиме від параметра C . Тоді, виключаючи цей параметр із системи, складеної з рівнянь (1.8), (1.9), одержимо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.10)$$

Рівняння (1.10) називають **диференціальним рівнянням сім'ї кривих** (1.8). Воно виражає спільну властивість кривих (1.8) незалежно від сталої C .

Приклад 1. Знайти диференціальне рівняння сім'ї парабол, які проходять через початок координат і мають осі симетрії, паралельні до осі ординат.

Розв'язання. Сім'ю парабол з умови задачі можна описати з допомогою формули $y = x^2 - Cx$, де C — довільна стала. Складемо систему

$$\begin{cases} y = x^2 - Cx, \\ y' = 2x - C \end{cases}$$

і виключимо з неї сталу C . Для цього знайдемо C з першого рівняння системи і підставимо у друге:

$$C = \frac{x^2 - y}{x} \Rightarrow y' = 2x - \frac{x^2 - y}{x} \Rightarrow y' = \frac{x^2 + y}{x}.$$

Відповідь: $xy' = x^2 + y$.

Аналогічно, маючи сім'ю кривих $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, залежну від n довільних сталих, можна при певних умовах одержати диференціальне рівняння, для якого ці криві будуть інтегральними. Для цього потрібно здиференціювати співвідношення $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ n разів за змінною x і виключити з нього та отриманих унаслідок диференціювання n рівнянь сталі $C_1, C_2, \dots, C_n$. У результаті одержимо диференціальне рівняння сім'ї кривих, яке виражатиме загальну властивість цих кривих.

Приклад 2. Знайти диференціальне рівняння сім'ї кривих $(x - C_1)^2 + C_2 y^2 = 1$.

Розв'язання. Двічі здиференціюємо за змінною x тотожність $(x - C_1)^2 + C_2 y^2 - 1 = 0$:

$$2(x - C_1) + 2C_2 y y' = 0, \quad 1 + C_2 (y'^2 + y y'') = 0.$$

Виключаючи з трьох рівностей сталі C_1, C_2 , після нескладних перетворень одержуємо диференціальне рівняння другого порядку $y^3 y'' + (y'^2 + y y'')^2 = 0$. ■

Рекомендована література: [1, с. 15–23], [7, с. 3–13, 22–25], [8, с. 9–19], [9, с. 4–8], [22, с. 6–15].

Питання до лекції 1

1. Яке рівняння називають звичайним диференціальним рівнянням? Чим відрізняються звичайні диференціальні рівняння від рівнянь з частинними похідними?

2. Як визначити порядок диференціального рівняння?

3. Яку функцію називають розв'язком диференціального рівняння? Як називають операцію знаходження розв'язків диференціального рівняння? Яку криву називають інтегральною кривою диференціального рівняння?

4. У чому полягає основна задача теорії інтегрування диференціальних рівнянь?

5. У чому полягає математичне моделювання реальних процесів і явищ, яка його роль у вивченні процесу? Що називають диференціальною моделлю? Наведіть декілька прикладних задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь.

6. Який вигляд має рівняння сім'ї кривих, залежних від одного параметра (n параметрів)? Як знайти диференціальне рівняння заданої сім'ї однопараметричних кривих (n -параметричних кривих)?

Вправи до лекції 1

1. Перевірте, чи є функції

$$\text{а) } y = x \cdot \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt; \quad \text{б) } 5x = \ln 5y; \quad \text{в) } y = 3x + \ln x + 2$$

розв'язками відповідних диференціальних рівнянь

$$\text{а) } y' = \frac{y+x \sin x}{x}; \quad \text{б) } y' = e^{xy'/y}; \quad \text{в) } x^2 y'' \ln x = xy' - y.$$

2. Знайдіть криві, в яких кожний відрізок дотичної, що лежить між координатними осями, точкою дотику ділиться навпіл.

3. Складіть диференціальне рівняння сім'ї кривих:

$$\text{а) } x^2 - y^2 = C; \quad \text{б) } y = \sin(x + C); \quad \text{в) } y = C_1 x^2 + C_2 e^x.$$

4. Складіть диференціальне рівняння:

а) усіх кіл, які дотикаються до осі абсцис;

б) усіх прямих на площині;

в) парабол, які проходять через точку $(1; 2)$ і мають вісь, паралельну до осі абсцис.

5. Знайдіть криві, нормалі до яких в усіх точках проходять через початок координат.