

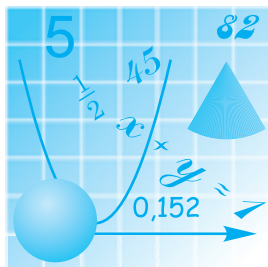
Ю.І. Мальований
Г.М. Литвиненко
Г.М. Бойко

АЛГЕБРА

7 клас

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх
навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН
2015

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я72
М21

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 20.07.2015 № 777)*

Рецензенти:

доцент кафедри математики і методики викладання математики
Тернопільського національного педагогічного університету ім. В. Гнатюка
В.Д. Галан,
вчитель математики Червоноградської ЗОШ № 11, вчитель-методист
О.Г. Ланій

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

ISBN 978-966-10-4110-2

© Мальований Ю.І., Литвиненко Г.М.,
Бойко Г.М., 2015
© Навчальна книга – Богдан,
оригінал-макет, 2015

Піктограмою  у підручнику позначено ті його електронні складові, які можна відкрити за посиланням:

<http://www.bohdan-digital.com/edu>.

*Алгебра шедевр, вона часто дає більше,
ніж у неї просять.*

Ж. Д'Аламбер,
французький математик

СЛОВО ДО УЧНІВ

Дорогі семикласники!

Перед вами підручник, за яким вам доведеться вивчати новий навчальний предмет з курсу математики — *алгебру*. До цього часу ви мали справу в основному з обчисленнями, які виконували з конкретними числами. Ви ознайомилися з правилами і прийомами таких обчислень, навчилися виконувати чотири математичні дії (операції) з цілими і дробовими числами. Ці та інші відомості, що стосуються чисел, вивчає галузь математики, яка називається *арифметикою*.

На відміну від арифметики, в алгебрі числа записують не лише за допомогою цифр, але в багатьох випадках позначають буквами. Алгебра вивчає правила перетворення виразів, складених із чисел, букв, знаків математичних дій. Вивчаючи алгебру, ви ознайомитеся з новими математичними операціями, а також поняттями, без яких не можна уявити не лише математики, але й більшості наук, навіть, здавалося б, далеких від неї. Протягом усієї історії становлення і розвитку алгебри як самостійної галузі математики важливим предметом її вивчення були рівняння. Вам уже відомі найпростіші рівняння, і ви вмієте їх розв'язувати. У процесі вивчення алгебри ваші знання про рівняння значно розширяться. Ви ознайомитеся з багатьма новими видами рівнянь і способами їх розв'язування, дізнаєтесь багато цікавого про функцію як могутній інструмент опису і дослідження реальних процесів навколишнього світу.

Отже, попереду у вас захоплююча подорож у світ алгебри. Сподіваємось, що здолати всі труднощі цієї подорожі вам допоможе

підручник. Яким він буде помічником — добрим чи не дуже — залежить і від вас. Ось декілька порад щодо роботи з ним.

Ніколи не намагайтеся виконувати вправи, не ознайомившись із теоретичним матеріалом, поданим у відповідному пункті підручника.

Щоб привернути вашу увагу до особливо важливих положень, їх виділено відмінним від звичайного шрифтом. Означення та властивості, які потрібно запам'ятати, виділено **напівжирним** шрифтом і позначено . Основні формули записано на кольоровому фоні. Послідовність виконання певних дій, перетворення виразів, розв'язування задач надруковано *курсивом*. Курсивом виділено й окремі терміни, які зустрічаються вперше.

Для зручності вивчення навчальний матеріал підручника розподілено за трьома розділами. Вони містять параграфи, які розбито на пункти, а ті, у свою чергу, — на підпункти. Кожна з цих складових частин має заголовок і відповідний порядковий номер. Зокрема, номер підпункту позначено цифрою всередині кружечка.

Зосередити увагу на найсуттєвішому вам допоможуть відповідні запитання та завдання для самоперевірки, подані в кінці кожного пункту, а також основні вимоги щодо засвоєння змісту кожного розділу, які його завершують.

У тексті наведено приклади розв'язування ряду вправ із детальними поясненнями і зразками відповідних записів. У рубриці «Увага!» ви знайдете застереження від можливих помилок, яких нерідко припускаються школярі.

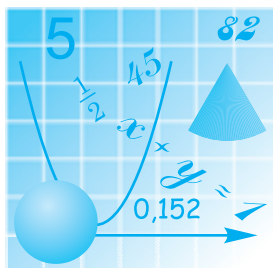
Виконуючи завдання для самоперевірки, ви зможете оцінити свої навчальні досягнення.

На рівень складності пропонованих задач і вправ указують умовні позначки: знак ° біля номера завдання позначає вправи, що відповідають початковому і середньому рівням; знак * — вправи високого рівня навчальних досягнень. Під номером без усіляких позначень уміщено вправи, що відповідають достатньому рівню.

У кінці підручника подано основні відомості з курсу математики 5–6-х класів, які допоможуть пригадати навчальний матеріал, потрібний для вивчення певного пункту.

Що ж, тепер залишається поринути у світ невідомого. Успіхів вам у його пізнанні!

Автори



Розділ І

ЦІЛІ ВИРАЗИ



§1.

РАЦІОНАЛЬНІ АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ОДНОЧЛЕНІВ

1.1. Вирази зі змінними.

Раціональні алгебраїчні вирази



Пригадайте

1. Наведіть приклади числового виразу і буквеного виразу.
2. Як знайти значення числового виразу?
3. Що необхідно знати, щоб знайти значення буквеного виразу?
4. До яких відомих вам формул входять букви? Поясніть їхній зміст.

① **Що таке алгебраїчний вираз.** У попередніх класах ви вже неодноразово зустрічалися з числовими виразами, тобто такими, де всі числа записані цифрами, а також із буквеними виразами, в яких одне або декілька чисел були позначені буквами. До числових належать, наприклад, вирази $6,8 - 3,5 \cdot 4$, $\frac{45-11}{2}$, $0,8 - 4 \cdot (13,1 + 14,9)$, $\left(\frac{2}{3} - 18\right) \cdot (7,5 + 12)$, а до буквених — $2m - 3n$, $0,5a^2$,

$2 \cdot (3x + y), \frac{2b-1}{3}$. Одне число, записане цифрами (6; 384; $-3,12$

тощо) також вважають числовим виразом, а число, позначене буквою (m, x, c тощо), — буквеним виразом.

У буквену виразі одна і та сама буква може позначати різні числа залежно від конкретних умов. Наприклад, у виразі $2(a + b)$, що є загальним записом правила обчислення периметра прямокутника зі сторонами a і b , букви a і b позначають будь-які додатні числа, якими можуть виражатися довжини відповідних сторін прямокутника. Тобто вони можуть змінювати свої значення. Тому їх називають **змінними**, а цей та інші буквені вирази — **виразами зі змінними** (або зі змінною, якщо змінна — одна).

Числові вирази і вирази зі змінними, які містять лише арифметичні дії над числами, мають загальну назву **раціональних алгебраїчних виразів**. Саме їх ми і будемо вивчати.

Якщо у вираз $a^2 - 5a + 4$ підставимо, наприклад, замість змінної a число 4 і виконаємо зазначені дії, то дістанемо числове значення, або коротше, **значення** цього виразу. Тобто,

якщо $a = 4$, то $a^2 - 5a + 4 = 4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0$;

якщо $a = 2$, то $a^2 - 5a + 4 = 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = 4 - 10 + 4 = -2$;

якщо $a = -3$, то $a^2 - 5a + 4 = (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 4 = 9 + 15 + 4 = 28$,

і т. д.

0, -2 , 28 — усе це значення виразу $a^2 - 5a + 4$ за відповідних значень a .

Бачимо, що для різних значень a дістаємо різні значення даного виразу. Тому кажуть, що значення цього виразу залежить від значення a .

Приклад 1. Розглянемо вираз $(4x + 96) : 4 - x$ і знайдемо його значення для кількох різних значень x :

якщо $x = 0$, то $(4x + 96) : 4 - x = (4 \cdot 0 + 96) : 4 - 0 = 96 : 4 = 24$;

якщо $x = 2$, то $(4x + 96) : 4 - x = (4 \cdot 2 + 96) : 4 - 2 = 104 : 4 - 2 = 26 - 2 = 24$;

якщо $x = -3$, то $(4x + 96) : 4 - x = (4 \cdot (-3) + 96) : 4 - (-3) = (-12 + 96) : 4 + 3 = 84 : 4 + 3 = 21 + 3 = 24$.

Чи випадково числові значення виразу для різних значень x виявилися однаковими?

Для відповіді на це запитання спростимо даний вираз, скориставшись правилом ділення суми на число. Маємо:

$$(4x + 96) : 4 - x = 4x : 4 + 96 : 4 - x = x + 24 - x = 24.$$

Тепер очевидно, що яким би не було значення x , значення виразу дорівнюватиме 24. Тому кажуть, що значення виразу $(4x + 96) : 4 - x$ *не залежить* від значення x .

Приклад 2. Обчислюючи значення виразу $\frac{2b}{b-5}$, коли $b = 5$, діста-

немо числовий вираз $\frac{2 \cdot 5}{5-5}$, який не має значення, бо знаменник дробу дорівнює нулю. У такому разі кажуть, що, коли $b = 5$, вираз $\frac{2b}{b-5}$ *не має смислу*.

Вираз $\frac{3a+4}{a^2-1}$ не має смислу, коли $a = 1$ та $a = -1$. Поясніть, чому.

Алгебраїчний вираз, який не містить ділення на змінну, називається **цілим виразом**. Далі ми розглядатимемо перетворення цілих виразів.

② **Як назвати вираз.** Обчислюючи значення виразу $(a-2)(a+4)$, слід виконувати дії в такій послідовності:

- 1) віднімання в перших дужках;
- 2) додавання у других дужках;
- 3) множення першого результату на другий.

Назву результату дії, яку в процесі знаходження значення виразу виконують останньою, поширюють на назву самого виразу. У даному випадку остання дія — множення, її результатом є добуток. Тому даний вираз є добутком виразів $a-2$ і $a+4$. У свою чергу, $a-2$ — це різниця чисел a і 2, а $a+4$ — сума чисел a і 4. Отже, остаточна назва виразу $(a-2)(a+4)$ така: добуток різниці чисел a і 2 та суми чисел a і 4.

При обчисленні значення виразу $(140 + 10) : (52 - 22)$ останньою дією є ділення, а її результатом — частка, що й визначає назву даного виразу: частка суми чисел 140 і 10 та різниці чисел 52 і 22.

Вирази виду $m : n$, або $\frac{m}{n}$, називають ще відношенням m і n .

Отже, попередній вираз $(140 + 10) : (52 - 22)$ можна назвати ще й так: відношення суми чисел 140 і 10 та різниці чисел 52 і 22.

Вираз $3 \cdot 8$ є добутком чисел 3 і 8. Використовують також іншу назву цього виразу — потроєне число 8. Вираз $2ab$ називають подвоєним добутком чисел a і b ; $\frac{7+4}{2}$ — півсумою чисел 7 і 4; $\frac{1}{3} \cdot (5 \cdot 10)$ — третиною добутку чисел 5 і 10.



Історична довідка

Перший крок до створення буквені символіки зробив давньогрецький математик Діофант (III ст.), який використовував скорочений запис слів.



Франсуа Вієт

Основоположником застосування буквені символіки в алгебрі вважають французького математика Франсуа Вієта (1540–1603). Його буквені символіка відрізняється від сучасної. Проте її використання дало змогу Вієту зробити важливі відкриття в математиці.

Спростив і узагальнив алгебраїчну символіку видатний французький учений Рене Декарт (1596–1650). Запровадженими ним позначеннями послуговуються і сучасні математики.



Запитання для самоперевірки

1. Які вирази належать до раціональних алгебраїчних? Наведіть приклади.

2. Як знайти значення раціонального алгебраїчного виразу, якщо він є: а) числовим; б) виразом зі змінною?
3. Який алгебраїчний вираз називають цілим? Наведіть приклади.
4. Як утворити назву алгебраїчного виразу? Поясніть на прикладах.



Задачі та вправи

Знайдіть значення виразів (1–2):

- 1°. а) $92 \cdot 5$; б) $103 \cdot 12$; в) $-98 \cdot 7$;
г) $27\frac{7}{8} \cdot 8$; ґ) $34,3 : 7$; д) $0,25 \cdot 7$.
- 2°. а) $1,5 \cdot \frac{2}{3} - 1\frac{5}{8}$; б) $2,6 + 3,4 : 1\frac{1}{16}$;
в) $2\frac{1}{49} \cdot 1\frac{1}{55} - 1,16 : 0,56$; г) $(51,8 + 44,3 + 48,2 - 24,3) : \frac{1}{3}$.
3. Чи правильні рівності:
а) $4\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(1\frac{7}{9} - \frac{4}{9}\right) = 5$; б) $5\frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \left(1\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 3$;
в) $90,9 : 3,03 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right) = 1$; г) $\left(\frac{2}{5} + 2\frac{3}{5}\right) \cdot (12,4 : 3,1) = 12$;
ґ) $\frac{12,5 - 4,1}{4} = 1,7 + 0,6$; д) $\frac{0,75 - 0,15}{2} = 0,15 + 0,25$?
- 4°. Значення якого з виразів дорівнює 4:
а) $5 - 3\frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot (-8)$; б) $12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2$;
в) $-3\frac{1}{3} \cdot 0,9 - \frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$; г) $2\frac{2}{3} + 1\frac{3}{4} \cdot 8\frac{4}{21} - 13$?
- 5°. Знайдіть значення виразів:
а) $2k$, якщо $k = 103$; б) $2k + 1$, якщо $k = 103$;
в) $2k - 1$, якщо $k = 28$; г) $3k + 1$, якщо $k = 25$;
ґ) $3k - 1$, якщо $k = 29$; д) $5k + 1$, якщо $k = 35$;
е) vt , якщо $v = 48,5$, $t = 2,6$.

6. Складіть і запишіть числовий вираз, який не має смислу.

Знайдіть значення виразів (7–9):

- 7°. а) $3a + 7,4$, якщо $a = 12$; б) $0,5x + 14$, якщо $x = -3$;
в) $24,5 - 4t$, якщо $t = 6$; г) $-k + 17$, якщо $k = -7$.

- 8°. а) $14a + 15b$, якщо $a = 1,5$ і $b = 0,5$;

- б) $15a - 14b$, якщо $a = 2,5$ і $b = 0,5$;

- в) $x(0,5a - 4)$, якщо $a = 42$ і $x = 0,2$;

- г) $84a + 12b$, якщо $a = 0,25$ і $b = -\frac{3}{4}$.

- 9°. а) $2(a + b)$, якщо $a = 6,4$ см, $b = 0,045$ м;

- б) $a + b + c$, якщо $a = 3,4$ см, $b = 0,4$ дм, $c = 0,05$ м;

- в) ah , якщо $a = 0,028$ км, $h = 18,5$ м;

- г) $4(a + b + c)$, якщо $a = 4,3$ дм, $b = 30$ см, $c = 0,27$ м.

- 10*. Запишіть вирази для обчислення периметрів фігур, зображених на рисунку 1. Яка з фігур має найбільшу площу?

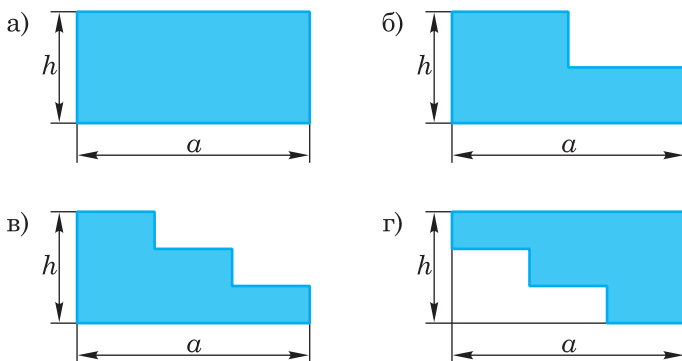


Рис. 1

- 11°. Нафтопровід перекачує 7 тис. т нафти за годину. Скільки тонн нафти можна перекачати нафтопроводом за 3 год? За 2,5 год? За t год? За добу? За 2 доби? За k діб?

- 12°. Для яких значень змінної y не мають смислу вирази:

- а) $\frac{3}{y-5}$; б) $\frac{y}{y+3}$; в) $\frac{7}{y^2+1}$; г) $\frac{13y}{6y-4}$; г) $\frac{y+5}{2y}$?

13. Знайдіть, якщо це можливо, пару значень змінних a і b , для яких не мають смислу вирази:

а) $\frac{17}{a-b}$; б) $\frac{5}{a+b}$; в) $\frac{a^2}{a^2+b^2}$; г) $\frac{a+b}{a^2+b^2+4}$.

14. Чи може значення виразу $-2x$ бути додатним числом? Якщо може, то наведіть приклади.

15. Чи може вираз $1 + a^2$ набувати від'ємних значень? Відповідь поясніть. Укажіть найменше значення цього виразу.

- 16*. Задумайте ціле число, помножьте його на 3, від одержаного результату відніміть 27, різницю поділіть на 3 і від частки відніміть задумане число. Яке число ви дістали? Доведіть, що одержаний результат не залежить від задуманого числа.

17. Заповніть таблицю (рух рівномірний прямолінійний):

Шлях, км	200	s	s	s		
Швидкість, км/год			50	v	60	v
Час, год	4	t			5	10

18. Заповніть таблицю:

Урожайність, ц з 1 га	4,1	P	25	P	
Площа ділянки, га	8,5	8			6,5
Валовий збір урожаю, ц			500	m	m

Запишіть вирази для розв'язування задач (19–22):

19. Зошит коштує a коп., ручка — вдвічі дорожча. Скільки коштують п'ять зошитів і три ручки?
20. Учні посадили x саджанців дуба, саджанців сосни — в 1,4 разу більше, а саджанців клена — на 80 штук менше, ніж саджанців сосни. Скільки саджанців сосни і клена посадили учні?
21. Турист ішов 5 год зі швидкістю a км/год і 3 год зі швидкістю b км/год. Яку відстань подолав турист?
22. Яку відстань пройде моторний човен проти течії за 2,4 год, якщо власна його швидкість 7,5 км/год, а швидкість течії x км/год?

23. Із двох населених пунктів A і B вирушають одночасно назустріч один одному пішохід та велосипедист і зустрічаються через t год. Складіть вираз для визначення відстані між цими населеними пунктами, якщо швидкість пішохода 5 км/год, а швидкість велосипедиста 12 км/год. Знайдіть цю відстань, якщо: а) $t = 2,5$ год; б) $t = 4$ год.
24. Периметр прямокутника 48 дм, основа a дм. Складіть вираз для обчислення площі прямокутника. Знайдіть площу прямокутника, якщо: а) $a = 7$ дм; б) $a = 11,5$ дм; в) $a = 14$ дм.
25. Запишіть чотири натуральні числа, кратні числу 3. Подайте кожне з них у вигляді добутку числа 3 на відповідне натуральне число. Запишіть вираз зі змінною, який позначає натуральне число, що ділиться на 3 без остачі.
- 26*. Складіть за рисунком 2 вираз для обчислення довжини відрізка CD .

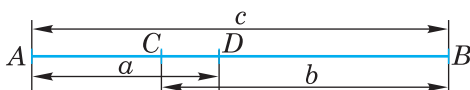


Рис. 2

Запишіть у вигляді виразу і обчисліть (27–29):

- 27°. а) Суму чисел 27,29 і 72,71;
 б) різницю чисел 68,1 і $-31,3$;
 в) добуток чисел $1\frac{3}{8}$ і $-1\frac{3}{5}$;
 г) частку чисел 0,01 і $-0,002$;
 ґ) подвоєну суму чисел 37,29 і 62,71;
 д) потроєну різницю чисел 68,1 і $-41,9$;
 е) подвоєний добуток чисел 7,5 і 0,4;
 є) третину суми чисел 5,8 і 3,5;
 ж) піврізницю чисел 9 і 15.

- 28°.** а) Суму чисел m і n , якщо $m = 4\frac{1}{4}$, $n = -5,3$;
 б) різницю чисел m і n , якщо $m = 0,6$, $n = -2\frac{2}{5}$,
 в) подвоєну суму чисел m і n , якщо $m = 10,7$, $n = 5,3$.
- 29*.** а) Різницю частки чисел $\frac{11}{15}$ і $3\frac{2}{3}$ та числа $0,5$, зменшену на число, протилежне числу $-0,3$;
 б) суму добутку чисел $5\frac{1}{3}$ і $0,75$ та числа $2,4$, збільшену на число, протилежне числу $-0,6$.
- 30°.** Від суми чисел $-15\frac{1}{4}$ і $7\frac{3}{4}$ відніміть $0,25$.
- 31*.** Від добутку чисел $3\frac{1}{2}$ і $-5\frac{3}{4}$ відніміть суму чисел $10,7$ і $-3,3$.
- 32*.** На скільки:
 а) різниця чисел $65,71$ і $-24,3$ більша від їх суми;
 б) добуток чисел $14,6$ і $-1,5$ менший від суми чисел $47,89$ і $-28,7$?
- 33*.** Що більше і на скільки: різниця числа 2 та добутку чисел $0,25$ і $7\frac{1}{5}$, поділена на $1\frac{2}{3}$, чи сума числа 3 та добутку чисел $-2\frac{1}{2}$ і $0,4$, помножена на $\frac{1}{3}$?

1.2. Тотожно рівні вирази. Тотожності

① **Що таке тотожність.** Два числові вирази, сполучені знаком « $\Rightarrow$ », утворюють **числову рівність**.

Якщо значення лівої і правої частин рівності одне й те саме число, то рівність називають **правильною**.

Наприклад, рівність $(56 + 24) \cdot 2 = 160$ правильна, оскільки $(56 + 24) \cdot 2 = 80 \cdot 2 = 160$. Правильною є також рівність $3 \cdot (15 - 9) = (41 - 5) : 2$, бо $3 \cdot (15 - 9) = 3 \cdot 6 = 18$ і $(41 - 5) : 2 = 36 : 2 = 18$.

Приклад 1. Розглянемо три вирази з однією і тією самою змінною: $2x + 2$, $0,5 + 0,5x$, $2(x + 3) - 4$.

Знайдемо їхні значення, якщо $x = 2$. Маємо:

$$2x + 2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6;$$

$$0,5 + 0,5x = 0,5 + 0,5 \cdot 2 = 1,5;$$

$$2(x + 3) - 4 = 2 \cdot (2 + 3) - 4 = 2 \cdot 5 - 4 = 6.$$

Числа 6; 1,5; 6 називають **відповідними значеннями** даних виразів.

Знайдемо відповідні значення даних виразів для кількох інших значень змінної x і порівняємо їх між собою. Для зручності результати обчислень занесемо до таблиці:

x	1	0	-1	-2	-3
$2x + 2$	4	2	0	-2	-4
$0,5 + 0,5x$	1	0,5	0	-0,5	-1
$2(x + 3) - 4$	4	2	0	-2	-4

Як бачимо, відповідні значення всіх виразів рівні між собою, якщо $x = -1$. Відповідні значення першого і третього виразів рівні між собою для всіх наведених у таблиці значень x .

Цікаво, чи будуть вони рівними і для інших значень змінної x ? Щоб відповісти на це запитання, перетворимо третій вираз, скориставшись розподільним законом множення. Маємо:

$$2(x + 3) - 4 = 2x + 6 - 4 = 2x + 2.$$

Отже, рівність $2(x + 3) - 4 = 2x + 2$ правильна для будь-яких значень змінної x . Таким чином, відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному при всіх значеннях змінної x . Про такі вирази кажуть, що вони тотожно рівні, або тотожні.



Вирази називають тотожно рівними, якщо їх відповідні значення дорівнюють одне одному за будь-яких значень змінних.

Два тотожно рівні вирази, сполучені знаком рівності, називають **тотожністю**.

Наприклад, рівності $2(x + 3) - 4 = 2x + 2$, $a + b = b + a$, $ab = ba$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ є тотожностями.

Очевидно, які б значення змінних не підставляти в тотожність, дістанемо правильну рівність.



Тотожність — це рівність, правильна за всіх значень змінних, що входять до неї.

Заміну виразу тотожно рівним йому називають **тотожним перетворенням виразу**.

Тотожні перетворення виразів виконують на основі законів і властивостей арифметичних дій, правил тощо. Так, заміну виразу $k(a + b)$ на тотожно рівний йому вираз $ka + kb$ зроблено з використанням розподільного закону множення відносно додавання.

Тотожне перетворення виразу $3a - (a - 2b)$ можна виконати, послідовно застосувавши правила розкриття дужок і зведення подібних доданків. Маємо: $3a - (a - 2b) = 3a - a + 2b = 2a + 2b$.

② Як довести тотожність. Довести тотожність — означає встановити шляхом логічних міркувань, що дані два вирази тотожно рівні. Для цього один із виразів або обидва тотожно перетворюють так, щоб звести їх до однакового вигляду.

Приклад 2. Встановити тотожну рівність виразів $3x + 6$ і $1,5 \cdot (4 + 2x)$.

Розв'язання. Перетворимо другий вираз у тотожно рівний йому на основі розподільного закону множення:

$$1,5 \cdot (4 + 2x) = 6 + 3x.$$

За переставним законом додавання маємо: $6 + 3x = 3x + 6$.

Після цього тотожність виразів $3x + 6$ і $1,5 \cdot (4 + 2x)$ не викликає сумніву.

Приклад 3. Встановити тотожність виразів $(b + d)a + dc$ і $(a + c)d + ab$.

Розв'язання. Зведемо обидва вирази до однакового вигляду:

1) $(b + d)a + dc = ab + ad + dc$;

2) $(a + c)d + ab = ad + dc + ab = ab + ad + dc$.

Отже, $(b + d)a + dc = (a + c)d + ab$. Таким чином, дані вирази теж тотожні.

Завдання встановити тотожну рівність двох виразів може бути сформульоване інакше: *довести тотожність*. У цьому випадку процес перетворень залишається тим самим.

Приклад 4. Довести тотожність $2a + 5(7 + a) - 40 = 7a - 5$.

Доведення. $2a + 5(7 + a) - 40 = 2a + 35 + 5a - 40 = 7a - 5$.

Отже, $7a - 5 = 7a - 5$. Тотожність доведено.

Для доведення тотожностей можна використати ще й такий спосіб: записують різницю лівої та правої частин даної рівності і одержаний вираз спрощують. Якщо в результаті дістали нуль, то тотожність вважають доведеною. Доведіть таким способом попередню тотожність.

Тотожні перетворення виразів, тотожності та їх доведення лежать в основі курсу алгебри і постійно зустрічатимуться у процесі розв'язування задач і вправ.

УВАГА! Щоб довести тотожність двох виразів, недостатньо порівняти між собою лише кілька відповідних значень цих виразів і переконатися, що вони дорівнюють одне одному. Адже йдеться про рівність *усіх* відповідних значень виразів, що шляхом обчислень перевірити неможливо, бо таких значень часто буває безліч. Тому застосовують розглянуті вище способи доведення.

А от для того, щоб установити, що дані вирази не є тотожно рівними, достатньо назвати хоча б одне значення змінної, при якому відповідні значення їх не дорівнюють одне одному.



Запитання для самоперевірки

1. Які значення двох виразів називають відповідними?
2. Які вирази називають тотожно рівними (тотожними)?
3. Що таке тотожність? Наведіть приклади.
4. Що таке тотожне перетворення виразу?
5. Які способи доведення тотожності двох виразів ви знаєте?



Задачі та вправи

34°. Запишіть відомі вам тотожності, що виражають властивості арифметичних дій.

35°. Чому дані вирази тотожно рівні:

а) $3a + 2$ і $2 + 3a$;

б) $3(x + 4) = 3x + 12$;

в) $a(2b) = 2ab$;

г) $3 + (4 - 5x) = 7 - 5x$?

36°. Які вирази тотожно рівні:

а) $3(x + y)$ і $3x + 3y$;

б) $5,7(x + y)$ і $5,7x + 5,7y$;

в) $4,8(a + b)$ і $4,8a + b$;

г) $(a - b) \cdot 8 + a$ і $7a - 8b$;

г) $4(m - 3)$ і $4m - 3$;

д) $1 - a + b$ і $1 - (a - b)$?

37. Доведіть тотожності:

а) $-5(4 + a) + 28 = 8 - 5a$;

б) $-0,8(-2 + 0,75a) = 1,6 - 0,6a$;

в) $(x + 3,5) \cdot 4 - 3x = x + 14$;

г) $4,2(x - 5) - 3,2x = x - 21$.

38. Заповніть таблицю:

x	0	1	-1	2	-2	2,5
$3(2x - 1) + 4$						
$6x + 1$						

Чи тотожні вирази $3(2x - 1) + 4$ і $6x + 1$? Відповідь обґрунтуйте.

39. Заповніть таблицю:

x	0	1	2	3	4	-1	-2	0,1
$ x + 3$								
$x + 3$								

Чи тотожні вирази $|x| + 3$ і $x + 3$? Обґрунтуйте відповідь.

40. Складіть вирази для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку 3, спочатку доповнивши фігуру до прямокутника, а потім розбивши її на два прямокутники. Доведіть тотожність утворених виразів.

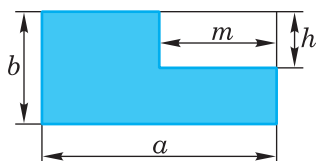


Рис. 3

- 41*. У тотожності $3x + 4x = 7x$ замініть змінну x виразом $a - 6$. Чи є тотожністю утворена рівність? Обґрунтуйте відповідь.
- 42*. У тотожності $2y + 8y = 10y$ замініть змінну y виразом $a - b$. Доведіть, що утворена рівність є тотожністю.

43. Доведіть, що значення виразів не залежить від a :

а) $6(3 - 2a) + 12a$; б) $-1,5(a - 8) + 3,5 \cdot \frac{3}{7}a$.

- 44*. Доведіть тотожність виразів:

а) $\frac{1}{2}mn - 0,5kn$ і $kn + \frac{1}{2}(m - k)n$;
 б) $y(x - m) + m(y - n)$ і $xy - nm$.

- 45*. Запишіть замість «*» такий вираз, щоб утворилася тотожність:

а) $4x(m + 0,5n) - 2xm = *(m - n)$;
 б) $*(x - y) = 3kx - 3ky$.

1.3. Степінь з натуральним показником



Пригадайте

1. За якими формулами обчислюють площу квадрата зі стороною a і об'єм куба з ребром b ?
2. Як ви розумієте записи: a^2 ; a^3 ?
3. Обчисліть: 5^2 ; 2^3 ; $0,5^2$; 4^3 .

① **Що таке степінь з натуральним показником.** Ви вже відновили в пам'яті, що $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$. Тобто в цих виразах числа 2 і 3 вказують відповідно на кількість множників a , з яких утворено добуток.

Аналогічно вважають, що вираз a^5 — це добуток п'яти множників a : $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Відповідно добуток шести однакових множників b записують так: b^6 . Отже, $b^6 = b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$.

У виразі a^5 число a називають **основою степеня**, 5 — **показником степеня**, а весь вираз a^5 — **степенем**.

Читають вираз a^5 так: a в п'ятому степені або п'ятий степінь числа a .

Аналогічно: b^6 — шостий степінь числа b або b в шостому степені. Основою степеня тут є число b , а показником степеня число 6.



Степенем числа a з натуральним показником n ($n \neq 1$) називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}}$$

В означенні обумовлено, що $n \neq 1$. Це природно, адже немає смислу говорити про добуток, що складається з одного множника.

Втім, домовилися першим степенем будь-якого числа вважати саме це число. Тобто $a^1 = a$. Показник степеня 1, як правило, у запису пропускають.

Нагадаємо, що другий степінь числа називають його *квадратом*, а третій — *кубом* цього числа.

УВАГА! Для правильного вживання терміна «степінь» не забувайте, що це іменник чоловічого роду.

Зазначимо, що основою степеня може бути будь-яке число або вираз.

Наприклад, $(-7,3)^3 = -7,3 \cdot (-7,3) \cdot (-7,3)$; $\left(\frac{4}{7}\right)^4 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7}$;
 $(6mn)^2 = 6mn \cdot 6mn$; $(x - 3y)^3 = (x - 3y) \cdot (x - 3y) \cdot (x - 3y)$.

Зверніть увагу на відмінність між виразами $(6mn)^3$ і $6mn^3$. У першому виразі показник степеня стосується всього добутку, що стоїть у дужках, а в другому — лише множника n . Тобто $(6mn)^3 = 6mn \cdot 6mn \cdot 6mn$, а $6mn^3 = 6m \cdot n \cdot n \cdot n$.

Корисно знати, що:

степінь додатного числа з будь-яким натуральним показником є число додатне;

степінь від'ємного числа з парним показником є додатним числом, а з непарним — від'ємним;

0 у будь-якому степені з натуральним показником дорівнює 0; будь-який степінь 1 дорівнює 1.

Спробуйте обґрунтувати ці твердження самостійно.

Варто пам'ятати і таке правило: *щоб піднести до степеня дріб, треба піднести до цього степеня чисельник дробу і його знаменник та записати перший результат у чисельнику, а другий — у знаменнику нового дробу.*

Це правило впливає з означення степеня з натуральним показником і правила множення звичайних дробів. Зокрема

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}. \text{ Взагалі } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0.$$

② **Як правильно обчислювати.** Вам відомо, що додавання кількох рівних між собою чисел замінюють множенням, наприклад,

$$\underbrace{5 + 5 + 5 + 5}_{4 \text{ рази}} = 5 \cdot 4.$$

Аналогічно, множення рівних між собою множників замінюють новою дією, яку називають **піднесенням до степеня**.

Ви знаєте, що додавання і віднімання — це дії *першого ступеня*, множення і ділення — *другого ступеня*. Піднесення до степеня належить до дій *третього ступеня*. Під час обчислень і перетворення виразів спочатку виконують (з урахуванням дужок) дії третього ступеня, потім — другого і нарешті — першого, в тому порядку, як вони записані.

Наприклад, $3 \cdot (4^2 + 56) : 2^2 = 3 \cdot (16 + 56) : 4 = 3 \cdot 72 : 4 = 54$.

Піднесення числа до степеня за допомогою калькулятора замінюють дією множення.

Наприклад, $4,2^3$ можна обчислити за такою програмою:

$4,2 \otimes 4,2 \otimes 4,2 \equiv 74,088$, або $4,2 \otimes \equiv 74,088$, тобто після набору 4,2 натиснути клавішу $\otimes$, а потім двічі на $\equiv$.



Запитання для самоперевірки

1. Як ви розумієте запис: b^n , де n — натуральне число, відмінне від 1? Яку назву в цьому випадку мають b , n і b^n ?
2. Який порядок виконання дій у процесі обчислення значення виразу $4 \cdot 3^2 - 8(6^3 + 7^2)$?



Задачі та вправи

Обчисліть значення виразів (46–47):

46. а) $2^2, 4^2, 5^2, 0,1^2, 0,1^3, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{5}\right)^2, \left(\frac{4}{5}\right)^2, \left(\frac{6}{7}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{3}{5}\right)^3$;
 б) $(-2)^2, (-2)^3, (-3)^2, (-3)^3, (-0,5)^2, (-0,5)^3, (-0,6)^2$.
47. а) $1,5^2, 2,5^2, \left(1\frac{1}{2}\right)^2, \left(2\frac{1}{3}\right)^2, \left(1\frac{1}{2}\right)^3, \left(2\frac{1}{3}\right)^3, \left(1\frac{2}{5}\right)^2, \left(1\frac{2}{5}\right)^3$;
 б) $8^2, (-8)^2, 11^2, (-11)^2, 1,2^2, (-1,2)^2, 2,1^2, -3^2, -0,3^2$.

48°. Обчисліть площу квадрата зі стороною:

а) $a = 5$ см; б) $a = 7\frac{1}{2}$ см; в) $a = 2,5$ дм; г) $a = 3\frac{1}{4}$ дм.

49°. Обчисліть об'єм куба з ребром:

а) $a = 4$ см; б) $a = 1,5$ дм; в) $a = 2\frac{1}{2}$ дм; г) $a = 3$ м.

50°. Запишіть вирази у вигляді степеня:

а) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$;

б) $2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a$;

в) $(x-y) \cdot (x-y) \cdot (x-y) \cdot (x-y) \cdot (x-y)$;

г) $4m^2n \cdot 4m^2n$.

51. Поясніть відмінність між виразами, записавши кожний із них у вигляді добутку без показника степеня:

а) $2a^4$ і $(2a)^4$;

б) $3xy^2$ і $(3xy)^2$;

в) $5(m-n)^3$ і $(5(m-n))^3$;

г) $2c^2d^2$ і $(2cd)^2$.

52. Випишіть вирази, які слід піднести до відповідного степеня:

а) $3b^5$;

б) $5mn^3$;

в) $(2xy)^4$;

г) $(3b)^5$;

г) $4x^3y$;

д) $0,1xy^2$;

е) $(1,2x^3y)^2$;

е) $(4x^2)^3$.

53. Серед даних виразів знайдіть ті, що є степенями, або їх можна подати у вигляді степеня іншого виразу з показником, більшим від 1:

а) $0,4a^2$;

б) x^9 ;

в) $25y^2$;

г) $(-3x^2y)^4$;

г) $\frac{1}{27}$;

д) x^2y^2 ;

е) $(c-d)^3$;

е) $(-a)^4$.

54°. Які з виразів є тотожними:

а) $(-a)^6$ і $-a^6$;

б) $(-a)^3$ і $-a^3$;

в) $x-2a$ і $-2a+x$;

г) pp^3 і p^4 ?

55°. Серед даних виразів знайдіть тотожно рівні та запишіть їх:

а) $(-m)^7$;

б) $(-a)^4$;

в) $2a^2b^2$;

г) $-m^7$;

г) m^7 ;

д) $(2ab)^2$;

е) a^4 ;

е) $-a^4$;

ж) $2ab^2$;

з) $4a^2b^2$.

56°. Вкажіть порядок дій при обчисленні значень виразів:

а) $2 \cdot 3^4$;

б) $(2 \cdot 3)^4$;

в) $(10-2)^2$;

г) 10^2-2^2 ;

г) $7ab^4$;

д) $(7ab)^4$;

е) $2 \cdot (3-4)^2$;

е) $(2 \cdot (3-a))^2$.

- 57°.** Обчисліть значення виразів:
 а) $0,25 \cdot 2^2$; б) $(0,25 \cdot 2)^2$; в) $(-5)^2 \cdot (-2)^2$; г) $-5^2 \cdot (-2^2)$.
- 58°.** Спростіть вирази:
 а) $x \cdot x \cdot x + y \cdot y$; б) $a \cdot a - b \cdot b \cdot b$; в) $m \cdot m + n \cdot n$;
 г) $c \cdot c \cdot c - p \cdot p$; і) $r \cdot r + x \cdot x \cdot x$; д) $p \cdot p \cdot p + r \cdot r$.
- 59°.** Запишіть вирази:
 а) квадрат числа x ;
 б) квадрат суми чисел x і y ;
 в) різниця квадратів чисел x і y ;
 г) квадрат різниці чисел x і y ;
 і) куб числа a ;
 д) куб суми чисел a і b ;
 е) сума кубів чисел a і b ;
 є) різниця кубів чисел a і b .
- 60.** Обчисліть:
 а) суму квадратів чисел 3 і -2 ;
 б) квадрат різниці чисел 25 і 8;
 в) різницю куба числа -3 і квадрата числа 5;
 г) суму куба числа -2 і різниці кубів чисел 4 і -1 .
- 61.** Значення якого з числових виразів дорівнює 5:
 а) $(-1)^8 + 2^2 + 0,4 \cdot 3\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$; б) $3^2 + 0,5 \cdot 2^3 - 2^3$;
 в) $1\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3} + 1\frac{2}{5} + (-1)^7$; г) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-5\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot 2\frac{1}{2} + 2^2$?
- 62.** Обчисліть:
 а) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4^2 + 3$; б) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot (0,5)^2$;
 в) $-(-5)^3 \cdot 0,5 + 10^2$; г) $-5 \cdot (-2)^3 + \frac{2}{3} \cdot (-6)^2$.
- 63.** Чи тотожні вирази:
 а) $-x^2$ і $(-x)^2$; б) $-x^3$ і $(-x)^3$;
 в) $3(-x)^2$ і $3(-x^2)$; г) $4(-x)^3$ і $4x^2(-x)$?
- 64.** Запишіть у вигляді степеня з основою 10 такі числа: 100; 1000; 100 000; 10 000 000.

- 65*.** Куб, об'єм якого дорівнює 1 м^3 , розрізали на кубічні сантиметри і розклали їх упритул в один ряд. Яку довжину матиме ряд (у сантиметрах)? Запишіть результат у вигляді степеня числа 10.
- 66*.** Швидкість світла дорівнює $300\,000\,000 \text{ м/с}$. Запишіть це число з використанням степеня числа 10.
- 67*.** Відстань від Землі до планети Нептун дорівнює 4,5 мільярда кілометрів. Запишіть значення цієї відстані, використавши степінь числа 10.
- 68*.** У Київському інституті кібернетики створено комп'ютер, який виконує 1 млрд операцій за 1 с. Запишіть за допомогою степеня числа 10, скільки операцій він виконає за 1 год; за 10 год.
- 69*.** Назвіть порядок дій, які слід виконати у даних виразах, і запишіть назву кожного з них:
- а) $\frac{a+b}{(a-b)^2}$; б) $(m+n)^3 - x^2$; в) $2(a^2 - b^2)$; г) $2x^2y + \frac{x}{y^2}$.
- 70*.** Знайдіть x :
- а) $x^4 = 81$; б) $x^3 = -8$; в) $x^2 = \frac{9}{16}$;
 г) $2^x = 8$; д) $0,3^x = 0,027$; е) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{25}$.

1.4. Властивості степеня з натуральним показником

① **Швидка лічба.** Спробуйте без калькулятора миттєво обчислити добуток $128 \cdot 256$. На перший погляд, зробити це неможливо.

Тим часом, завдання не є таким безнадійним.

Запишемо перші п'ятнадцять натуральних чисел, а під кожним із них — відповідний степінь числа 2. Дістанемо таку таблицю:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

Знайдемо добуток $128 \cdot 256$ на калькуляторі або письмово. Дістанемо 32768. Як бачимо, це число теж стоїть у рядку степенів числа 2, і йому відповідає показник степеня 15, тобто $32\,768 = 2^{15}$. У свою чергу, $128 = 2^7$, $256 = 2^8$. Помічаємо, що $15 = 7 + 8$. Отже, $2^7 \cdot 2^8 = 2^{7+8} = 2^{15}$.

Щоб обчислити добуток $32 \cdot 64$, знайдемо у верхньому рядку таблиці відповідні цим множникам показники степенів 5 і 6, додамо їх і під сумою 11 прочитаємо результат — 2048. Множення 32 на 64 звичайним способом показує, що результат дістали правильний.

Для обчислення частки $8192 : 512$ знайдемо різницю відповідних показників степенів: $13 - 9 = 4$. Під показником 4 шукаємо потрібний результат — 16. Перевірте правильність відповіді.

Обчисліть аналогічно: $8192 : 1024$; $16\,384 : 512$.

Ці обчислення виявилися можливими на основі властивостей степеня з натуральним показником, з якими ви зараз ознайомитесь. Зауважимо, що далі поряд зі словосполученням «ступінь з натуральним показником» буде вживатися просто «ступінь», що означатиме те саме поняття.

② Властивості степеня.

Властивість 1. Добуток степенів однієї основи дорівнює степеню цієї самої основи, показник якого дорівнює сумі показників множників:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \quad (1)$$

Доведення. Скористаємось означенням степеня з натуральним показником. Маємо:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ разів}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ разів}} = a^{m+n}.$$

На основі цієї властивості можна сформулювати таке правило: *щоб помножити степені однієї основи, треба показники степенів додати, а основу залишити ту саму.*

Наприклад: 1) $2^5 \cdot 2^9 = 2^{5+9} = 2^{14}$; 2) $b^{13} \cdot b^4 = b^{17}$.

Цю властивість називають **основною властивістю степеня** з натуральним показником. Вона має місце для трьох і більше степенів. Наприклад, $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 = 5^{2+4+6} = 5^{12}$.

Властивість 2. Частка степенів однієї основи дорівнює степеню цієї самої основи, показник якого дорівнює різниці показників діленого і дільника:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m > n, a \neq 0). \quad (2)$$

Доведення. Ви знаєте, як перевірити правильність виконання ділення. Для цього треба частку помножити на дільник. У результаті маємо дістати ділене. Скористаємось цим у даному випадку. Помножимо частку a^{m-n} на дільник a^n і результат знайдемо за основною властивістю степеня. Маємо:

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m.$$

Дістали ділене. Отже, $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Зверніть увагу на застереження у формулюванні властивості 2: $m > n$ і $a \neq 0$. Вони не випадкові. Адже коли $m = n$ або $m < n$, тоді різниця $m - n$ не буде натуральним числом, а йдеться про степінь з натуральним показником; $a \neq 0$, бо на нуль ділити не можна.

Наприклад: 1) $6^9 : 6^7 = 6^{9-7} = 6^2$; 2) $\frac{c^{16}}{c^{12}} = c^4$.

З цієї властивості випливає правило:

щоб поділити степені однієї основи, треба від показника степеня діленого відняти показник степеня дільника, а основу залишити ту саму.

Властивість 3. Степінь добутку двох множників дорівнює добутку степенів цих самих множників:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n. \quad (3)$$

Доведення. Для перетворення виразу $(ab)^n$ скористаємося означенням степеня з натуральним показником, а також переставним і сполучним законами множення. Маємо:

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_{n \text{ разів}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ разів}} = a^n \cdot b^n.$$

Ця властивість має місце і для добутку більше двох множників.

Отже, правило піднесення добутку до степеня з натуральним показником таке:

щоб піднести добуток до степеня, треба кожний множник піднести до цього степеня і записати добуток отриманих результатів.

Наприклад: 1) $(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$; 2) $(3ab)^3 = 3^3 \cdot a^3 \cdot b^3 = 27a^3b^3$.

Властивість 4. Степінь степеня дорівнює степеню тієї самої основи, показник якого є добутком даних показників степенів:

$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (4)$$

Доведення. За означенням степеня з натуральним показником маємо:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ разів}}.$$

За основною властивістю степеня маємо:

$$a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m = a^{\underbrace{m+m+\dots+m}_{n \text{ доданків}}} = a^{mn}.$$

Отже, $(a^m)^n = a^{mn}$.

Відповідне правило піднесення степеня можна сформулювати так:

щоб піднести степінь до степеня, треба основу степеня залишити ту саму, а показники степенів перемножити.

Наприклад: 1) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$; 2) $(b^6)^5 = b^{6 \cdot 5} = b^{30}$.

Усі розглянуті властивості степеня обґрунтовано для натуральних показників, більших за 1. Якщо показник степеня дорівнює 1, то ці властивості очевидні. Переконайтеся у цьому самостійно.

③ Спростуємо обчислення. Кожну з розглянутих тотожностей можна використовувати, помінявши місцями ліву і праву їхні частини.

Наприклад, обчислення виразу $2^5 \cdot 5^5$ можна суттєво спростити, скориставшись тотожністю (3): $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, прочитаною справа наліво: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$. Маємо:

$$2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\,000.$$

Аналогічно, скориставшись тотожністю $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, одержаною

з розглянутої на с. 22 тотожності $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, спростуємо обчислен-

ня виразу $\frac{32^4}{16^4}$:

$$\frac{32^4}{16^4} = \left(\frac{32}{16}\right)^4 = 2^4 = 16.$$



Запитання для самоперевірки

1. Якими властивостями степеня з натуральним показником скористалися у перетворенні виразів:

а) $3^2 \cdot 3^3 = 3^5$; б) $(7ab^3)^2 = 49a^2b^6$;

в) $32^3 : 16^2 = (2^5)^3 : (2^4)^2 = 2^{15} : 2^8 = 2^7$?

2. Яка з рівностей правильна:

а) $2^4 \cdot 3^4 = 6^8$; б) $2^4 \cdot 3^4 = 6^{16}$; в) $2^4 \cdot 3^4 = 6^4$?



Задачі та вправи

71°. Виконайте множення:

а) $x^4 \cdot x^6$;

б) $a^{12} \cdot a^7$;

в) $y^4 \cdot y^6$;

г) $m \cdot m^2$;

г) $b^3 \cdot b^2 \cdot b$;

д) $c \cdot c$;

е) $c^3 \cdot c^2 \cdot c$;

е) $2a^2 \cdot a^3$;

ж) $3b^4 \cdot b^5$;

з) $2^5 \cdot 2^2$;

и) $3^3 \cdot 3^3$;

і) $7,8 \cdot 7,8^2$;

ї) $a^n \cdot a^2$;

й) $b^3 \cdot b^k$;

к) $c^m \cdot c^n$.

Піднесіть до степеня (72–73):

72°. а) $(a^2)^3$;

б) $(b^4)^2$;

в) $(x^8)^3$;

г) $(m^3)^3$;

г) $(y^{10})^{10}$;

д) $(c^7)^4$;

е) $(a^5)^5$;

е) $(p^8)^8$;

ж) $(x^n)^3$;

з) $(m^4)^p$.

73°. а) $(a^2b^2)^2$;

б) $(x^3y^3)^3$;

в) $(2m^2n^4)^2$;

г) $(3xy^5)^2$;

г) $(0,1p^3n)^3$;

д) $(a^nx^2)^4$;

е) $(a^2x^m)^n$;

е) $(b^mc^n)^p$.

Виконайте ділення (74–75):

- 74°. а) $y^8 : y^4$; б) $a^6 : a^3$; в) $m^{12} : m^4$; г) $c^{16} : c^8$;
 ґ) $x^{24} : x^{12}$; д) $b^{36} : b^6$; е) $n^{18} : n^3$; е) $p^{25} : p^5$;
 ж) $x^{14} : x^7$; з) $y^{30} : y^{15}$.
- 75°. а) $x^{16} : x^8$; б) $x^{16} : x^2$; в) $x^{16} : x^{10}$; г) $a^8 : a^5$;
 ґ) $a^{18} : a^2$; д) $a^{18} : a^9$; е) $a^{18} : a^{12}$; е) $b^{17} : b^{15}$;
 ж) $2^7 : 2^5$; з) $c^4 : c^3$; и) $5^{16} : 5^{15}$; і) $y^n : y^5$;
 ї) $x^7 : x^p$; й) $m^n : m^k$.

76*. Спростіть вирази:

- а) $m^{p-2} \cdot m^{3-p}$; б) $a^{2k} \cdot a^{1-k}$; в) $b^{3n} \cdot b^n$; г) $x^n \cdot x^n$;
 ґ) $y^{3p} : y^{2p}$; д) $y^{p+1} : y^p$; е) $c^{k+3} : c^{k+2}$; е) $m^{k-1} : m^{k-3}$.

77. Замість крапок запишіть відповідні множники, щоб утворилися тотожності:

- а) $x^8 \cdot \dots = x^{16}$; б) $m^{12} \cdot \dots = m^{24}$; в) $\dots \cdot 2^6 = 2^{12}$;
 ґ) $\dots \cdot 3^3 = 3^6$; ґ) $\dots \cdot x^5 = x^5$; д) $a^8 \cdot \dots = a^{10}$;
 е) $b^4 \cdot \dots \cdot b^5 = b^{11}$; е) $y \cdot y^2 \cdot \dots = y^6$; ж) $n \cdot \dots \cdot n^3 = n^5$.

Знайдіть і виправте допущені помилки (78–79):

- 78°. а) $x^3 \cdot x^2 = x^6$; б) $x^5 \cdot x^4 = x^9$; в) $(y^4)^2 = y^6$;
 ґ) $(p^3)^4 = p^{12}$; ґ) $(a^2)^2 = a^4$; д) $c^{27} : c^9 = c^3$;
 е) $a^{15} : a^5 = a^{10}$; е) $a^3 \cdot b^2 = ab^5$; ж) $(ab^2)^3 = ab^6$;
 з) $(ab^2)^3 = ab^5$; и) $(ab^2)^4 = a^4b^6$; і) $(ab^2)^4 = a^4b^8$.
79. а) $(4x^3y^4)^2 = 8x^6y^8$; б) $(3x^4y)^2 = 9x^8y^2$;
 в) $(0,3x^2y^2)^2 = 0,9x^4y^4$; ґ) $(2a^3b^4)^4 = 16a^{12}b^{16}$;
 ґ) $5 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$; д) $\frac{75^2}{15^2} = 5$.

80°. Запишіть у вигляді степеня:

- а) a^2b^2 ; б) x^4y^4 ; в) b^6c^6 ; г) $36m^2n^2$;
 ґ) x^6y^2 ; д) $4m^4n^6$; е) $c^{12}d^9$; е) $8x^6$;
 ж) $-p^3$; з) -5^5 .

Обчисліть (81–84):

81. а) $0,25^{10} \cdot 4^{10}$; б) $\left(\frac{1}{8}\right)^4 \cdot 16^4$; в) $\left(1\frac{1}{8}\right)^{10} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{10}$;
 ґ) $\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot 6^7$; ґ) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 4^5$; д) $(0,125)^6 \cdot 8^6$.

82. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 2^7$; б) $(0,2)^8 \cdot 5^9$; в) $(1,25)^4 \cdot 8^6$; г) $(0,5)^9 \cdot 4^8$.

83. а) $\frac{2^4 \cdot 3^5}{6^6}$; б) $\frac{2^9}{4^4}$; в) $\frac{9^5}{3^9}$; г) $\frac{27^4}{9^6}$;
 р) $\frac{4^{10}}{8^6}$; д) $\frac{27^{10}}{81^7}$; е) $\frac{6^{10}}{2^9 \cdot 3^9}$; є) $\frac{2^5 \cdot 5^5}{100^2}$.

84*. а) $\frac{4^2 \cdot 5^3}{2^5 \cdot 25}$; б) $\frac{(-2)^6 \cdot 49^2}{7^5 \cdot 8^2}$; в) $\frac{5^3 \cdot 9^4}{3^9 \cdot 25^2}$; г) $\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 100^2}{1000^2}$.

85*. Порівняйте:

а) 4^8 і 8^5 ; б) 9^7 і 27^4 ; в) 10^{20} і 20^{10} ; г) 6^5 і 3^{10} .

Розв'яжіть рівняння (86–88):

86. а) $4^2 \cdot x = 4^3$, $2^4 \cdot x = 2^6$, $3^2 \cdot x = 3^7$,
 б) $a : 2^3 = 2^2$, $5^3 : x = 5^2$, $3^6 : x = 9^2$.

87. а) $\frac{x}{2^2} = 2^3$; б) $\frac{4^5}{x} = 4^3$; в) $\frac{4^5 \cdot x}{4^2} = 4^4$; г) $\frac{(-3)^2 t}{3^3} = 3$.

88*. а) $(2^x)^3 = 2^6$; б) $(3^2)^x = 3^6$; в) $(2^2)^x = 2^8$;
 г) $x^3 = 1$; р) $(x-3)^2 = 0$; д) $(x-3)^2 = 1$.

89*. Заповніть порожні клітинки таблиць числами так, щоб добуток усіх чисел по кожній вертикалі, горизонталі та діагоналі дорівнював одному й тому самому числу. Числа, записані в клітинках, розставте у порядку зростання. Визначте закономірність розміщення чисел.

а)

		2^6
	2^5	
2^4	2^3	

б)

	-32	
16	-8	2^8

90*. Обчисліть за допомогою калькулятора і результати округліть до десятих:

а) $4,2^2 \cdot 5,6^3$; б) $8,8^3 : 4^3$; в) $\frac{6,1^2 \cdot 2^3}{3,1^2}$; г) $\frac{7,48^2 \cdot 3^2}{2^3}$.

91*. Для якого значення x вирази мають найменше або найбільше значення? Які саме?

а) $x^2 + 3$;

б) $2 - x^2$;

в) $|x| + 3$;

г) $\frac{4+x^2}{2}$;

г) $\frac{4-x^2}{2}$;

д) $\frac{4}{x^2+2}$.

1.5. Одночлен.

Перетворення одночленів

① **Що таке одночлен.** Розглянемо відомі формули, що стосуються зображених на рисунку 4 чотирьох фігур.

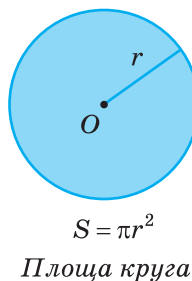
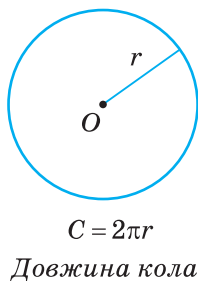
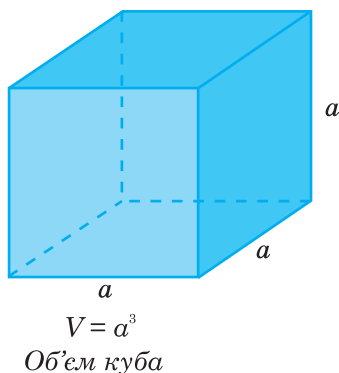
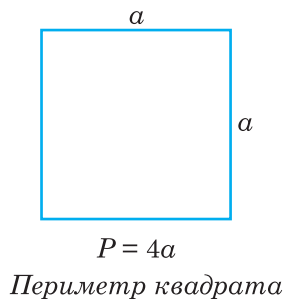


Рис. 4

Вирази, що містяться у правих частинах формул, є добутками чисел 4, 2, π , змінних a , r або їхніх степенів. Такі вирази називають **одночленами**.



Вираз, що є добутком чисел, змінних та їхніх степенів, називають одночленом.

Приклади одночленів: $2a^2b$, $-3x^3y^4$, $4c^8d^2 \cdot 0,1m$.

Одночленами вважають також числа, змінні та їхні степені. Наприклад: 5, 2^2 , a^3 .

Вираз $\frac{5m^2n^4}{2}$ за означенням не є одночленом (бо містить дію ділення на 2), але його можна записати у вигляді одночлена, виконавши нескладне перетворення: $\frac{5m^2n^4}{2} = \frac{5}{2}m^2n^4$, де $\frac{5}{2}$ — число.

Вирази $2(a + b)$, $(x - y)^2$, $3ab - 4c^3$ не є одночленами, бо, крім множення і піднесення до степеня, містять додавання або віднімання.

② **Стандартний вигляд одночлена.** Трапляється, що одночлен містить кілька числових множників або степенів однієї змінної. У такому разі їх, як правило, замінюють одним числовим множником і одним степенем відповідної змінної.

Розглянемо для прикладу таку задачу.

Задача 1. Знайдіть масу товару, що може вмістити рефрижератор (рис. 5), якщо маса 1 м^3 товару дорівнює 0,12 т.

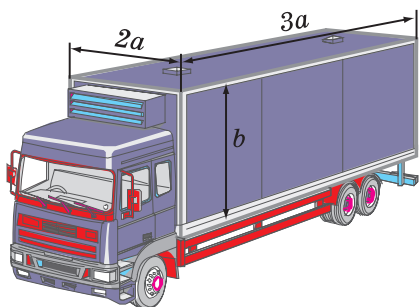


Рис. 5

③ Як звести одночлен до стандартного вигляду. Ми розглянули кілька прикладів зведення одночленів до стандартного вигляду. Так само слід підходити до виконання більшості вправ: їхні умови можуть бути сформульовані по-різному, але суть залишається тією самою.

Наприклад:

а) виконайте множення $4x^4 \cdot 2x^4y$;

б) виконайте дії: $4x^4 \cdot 2x^4y$;

в) спростіть вираз $4x^4 \cdot 2x^4y$;

г) знайдіть добуток $4x^4 \cdot 2x^4y$.

Усі ці формулювання, по суті, означають одне: потрібно звести одночлен $4x^4 \cdot 2x^4y$ до стандартного вигляду.

Для виконання цього завдання достатньо скористатися відповідними законами арифметичних дій і властивостями степеня:

$$4x^4 \cdot 2x^4y = 4 \cdot 2x^4x^4y = 8x^8y.$$

Зводячи одночлен $4x^4 \cdot 2x^4y$ до стандартного вигляду, ми фактично замінили добуток двох одночленів $4x^4$ і $2x^4y$ одним одночленом.

Якщо потрібно перетворити в одночлен стандартного вигляду степінь одночлена, застосовують правило піднесення до степеня добутку.

Наприклад: $(3a^2b^4)^2 = 3^2(a^2)^2(b^4)^2 = 9a^4b^8$.

④ Як записати одночлен у вигляді добутку двох одночленів. Іноколи доводиться виконувати перетворення, обернене до попереднього, — записувати одночлен стандартного вигляду як добуток двох одночленів.

Наприклад, одночлен $6x^4y^8$ потрібно записати у вигляді добутку двох одночленів, один із яких дорівнює $3xy^2$. Щоб знайти другий одночлен, порівнюють відповідні множники даних одночленів і з'ясовують, на який вираз слід помножити один із них, щоб дістати потрібний. У даному випадку такими множниками є 6 і 3; x^4 і x ; y^8 і y^2 . Щоб дістати 6, потрібно 3 помножити на 2; щоб дістати x^4 , треба x помножити на x^3 ; щоб дістати y^8 , слід y^2 помножити на y^6 . Отже, шуканий одночлен дорівнює $2x^3y^6$. Тобто $6x^4y^8 = 3xy^2 \cdot 2x^3y^6$.

⑤ Степінь одночлена. Одночлен $3x^2$ містить змінну x у другому степені, а одночлен $2,4x^5$ — у п'ятому. В такому разі кажуть,

що одночлен $3x^2$ — *другого степеня*, а одночлен $2,4x^5$ — *п'ятого степеня*. Якщо одночленом є число, то степінь такого одночлена за означенням дорівнює нулю.

Степінь одночлена з кількома змінними дорівнює сумі показників степенів цих змінних.

Наприклад, вираз $4x^3y^2z$ є одночленом шостого степеня, бо сума показників степенів змінних, що входять до нього, дорівнює $3 + 2 + 1 = 6$.



Запитання для самоперевірки

1. Який вираз називають одночленом? Наведіть приклади.
2. Які з одночленів є одночленами стандартного вигляду:
 а) $3a^3ba$; б) $4xy^3$; в) $-4,5m^4n \cdot 2$;
 г) $a^2b^7c^4$; д) $3ddd$?
 Відповідь поясніть.
3. Яку неточність допущено в означенні: числовий множник, який стоїть в одночлені на першому місці, називається його коефіцієнтом?
4. Як звести одночлен до стандартного вигляду? Поясніть на прикладі.



Задачі та вправи

92°. Які з виразів є одночленами:

- а) $3c^3d^2$; б) $\frac{5}{8}x^4$; в) $\frac{3mn^3}{4}$; г) $\frac{a}{-1,3}$;
 д) $-\frac{c}{6}$; е) $(x-4)^3$; ж) 1 ; з) $(8a^3)^{29}$?

Які з них можна записати у вигляді одночлена? Зробіть це.

93°. Зведіть одночлени до стандартного вигляду і назвіть коефіцієнти утворених одночленів:

- а) $ab^3 \cdot (-3b^4)$; б) $-8x^2 \cdot (-4x^3y^4)$; в) $4m \cdot 0,25n$;
 г) $-5c^2d^3 \cdot 0,2cd$; д) $2\frac{1}{3}mn \cdot \frac{1}{7}mn$.

94°. Знайдіть добуток одночленів:

- а) $17a^2$ і $5a$; б) $-6ab$ і $2a$; в) $-9ab$ і $-8ab$;
г) $-0,5a^2$ і $9ab$; р) $-\frac{4}{7}a^2b$ і $\frac{5}{9}a$; д) $-0,8a^3b$ і $\frac{4}{7}ab^2$;
е) $-0,6a - \frac{3}{4}ab$; е) $\frac{7}{8}a^3b$ і $-0,2ab$; ж) $-\frac{4}{9}ab$ і $-18a^3b$.

95°. Спростіть вирази:

- а) $(3ax)^2$; б) $(2ax)^3$; в) $(0,4ab)^2$;
г) $(-0,2ab)^3$; р) $(-0,5ab)^2$; д) $(-0,4a^2b)^3$;
е) $(-0,6a^3b)^2$; е) $(-0,3a^2b)^3$; ж) $\left(\frac{3}{4}a^2b^3\right)^2$.

Піднесіть одночлени до степеня (96–97):

- 96°.** а) $(3xy)^2$, $(4xy)^3$, $(-4x^2)^2$, $(-7xy^2)^2$, $(2x^2y)^3$;
б) $(0,1x)^2$, $(0,1x)^3$, $(0,4x^3)^2$, $(-0,4x^2)^2$, $(-0,6x^2y)^3$.

- 97.** а) $\left(\frac{3}{7}x^3\right)^2$; б) $\left(-\frac{3}{7}x^2y\right)^2$; в) $\left(-\frac{7}{9}x^2y\right)^2$;
г) $\left(\frac{12}{17}xy\right)^2$; р) $\left(\frac{15}{17}x^2y\right)^2$.

Виконайте дії (98–99):

- 98°.** а) $2x \cdot (3x)^2$; б) $0,8x \cdot (-4x)^2$; в) $(-2x)^3 \cdot (-0,8x)$;
г) $\frac{4}{3} \cdot 2,1x$; р) $4x^2 \cdot (-4x)^2$; д) $7xy \cdot (-3x^2)^3$.

- 99°.** а) $(-3x)^2 \cdot (-2x)^3$; б) $(-0,8x^2)^2 \cdot 1\frac{2}{7}xy$;

в) $\left(1\frac{3}{4}x\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{7}x^3y\right)$.

100. Перетворіть вирази в одночлени стандартного вигляду, а потім, якщо можливо, запишіть їх у вигляді степеня:

- а) $2a^3b^4 \cdot 8ab^2$; б) $0,7x^3y \cdot 6xy^2$; в) $\frac{1}{2}x^2y \cdot 2x^4y^3$;
г) $8cd^2 \cdot 2c^3d^2$; р) $(-3xy^4) \cdot (-12xy^2)$; д) $8m^2n^5 \cdot (-8mn)$.

101*. Знайдіть помилки, виправте їх і поясніть, порушення яких правил призвело до них:

- а) $x \cdot x = 2x$; б) $5 \cdot 2^2 = 10^2$; в) $x^3 \cdot x^2 = x^6$;
 г) $(x^3)^2 = x^9$; ґ) $(x^4)^3 = x^7$; д) $4^2 \cdot 3^2 = 12^4$;
 е) $(-3x)^4 = -12x^4$; є) $a^2b^3 = (ab)^5$; ж) $-a^4 \cdot 2a^3 = 2a^7$.

Заповніть пропущені місця відповідними множниками так, щоб утворилися тотожності (102–104):

- 102.** а) $8x^3 = 4x^2 \cdot \dots$; б) $25x^2y = \dots \cdot y$;
 в) $16x^2y^3 = 4x^2y \cdot \dots$; ґ) $9x^3y^2 = -3x^2y \cdot \dots$;
 ґ) $64x^4y^2 = \dots \cdot 4x^2y$; д) $-7b^2c \cdot \dots = 63b^5c^4$.

- 103.** а) $4m^2n \cdot \dots = m^5n^3$; б) $\dots \cdot (-5x^2y) = x^4y$;
 в) $5a^2b^4 \cdot \dots = -5a^2b^4$; ґ*) $3a^3b \cdot \dots = \frac{1}{9}a^3b^3$;

ґ*) $16m^3n^4 = (2mn)^2 \cdot \dots$; д*) $36x^5y^2 = \dots \cdot (3x^2y)^2$.

- 104*.** а) $200x^5y^5 = (5\dots)^2 \cdot (\dots)^3$; б) $2x^7y^5 = (\dots)^3 \cdot (0,5\dots)^2$;
 в) $\frac{9}{8}x^5y^5 = \left(\frac{3}{2}\dots\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(\dots)^3$; ґ) $\frac{2}{27}x^5y^5 = \left(\frac{2}{3}\dots\right)^3 \cdot (\dots)^2$.

105. Вантажним автомобілем привезли 50 дощок завдовжки a м, завширшки b дм, завтовшки $0,2b$ дм кожна. Запишіть у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз для обчислення маси всіх дощок, якщо 1 м^3 деревини має масу $0,8 \text{ т}$.

106*. Розставте в порожніх клітинках таблиць одночлени так, щоб їхній добуток у кожній вертикалі, горизонталі та діагоналі дорівнював $a^{12}b^{15}$:

а)

		ab^6
a^2b^9		a^6b

б)

	a^4b^5	
a^5b^6	b	

Одночлени, записані в клітинках, розмістіть у порядку зростання степенів букви b . Визначте закономірність розміщення одночленів, записаних у клітинках.

107*. Розставте в порожніх клітинках таблиць одночлени так, щоб добуток усіх одночленів кожної вертикалі, горизонталі та діагоналі був одночленом однакового степеня:

а)

x^4y^2		x^2y^6
	x^5y^5	
		x^6y^8

б)

		a^3b^5
		a^2
	b^2	a^7b^7

Розмістіть одночлени в порядку:

- а) спадання степеня y ;
 б) зростання степеня a .



Завдання для самоперевірки

I – III рівні

1. Обчисліть:

- а) $(-3)^2$; б) $(-6)^3$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; г) $(5-3)^3$;
 і) $3^3 - 5$; д) $1,5^2$; е) -3^3 ; є) $\frac{3^3}{3^2}$.

2. Знайдіть значення виразу $x^2 - 3x + 7$, якщо:

- а) $x = -4$; б) $x = \frac{2}{3}$; в) $x = 1,2$; г) $x = 0$.

3. Виконайте дії:

- а) $a^4 : a^3$; б) $x^2 \cdot x \cdot x^5$; в) $3m^8 : m^4$; г) $y^3 \cdot 2y \cdot y^5$.

4. Розв'яжіть рівняння:

- а) $5^3 \cdot x = 5^6$; б) $x : 3^3 = \frac{1}{3}$; в) $5^5 : x = 5^2$; г) $3^2 \cdot x = 27$.

5. Для яких значень змінної x не мають смислу вирази:

- а) $\frac{4}{x-3}$; б) $\frac{x}{x+4}$; в) $\frac{2x}{x^2-4}$; г) $\frac{x+3}{x}$.

6. Які з виразів тотожно рівні:
а) x^5 ; б) $(x^3)^2$; в) x^6 ; г) $x^2 \cdot x^3$?
7. Спростіть вирази:
а) $x^3 \cdot x^2$; б) $x^6 : x^2$; в) $(x^3)^2$; г) $x^4 : x^2$?
8. Запишіть одночлени у стандартному вигляді і назвіть їхні коефіцієнти:
а) $3x^4 \cdot x$; б) $-2a^3 \cdot 3a$;
в) $-5a^2x \cdot 0,1ax^3$; г) $0,25mn \cdot 4m^2n$.
9. Допишіть замість крапок такі множники, щоб утворилися тотожності:
а) $a^4b^2 = a^2b^2 \dots$; б) $x^5y^6 = x^3y^2 \dots$;
в) $3m^4n^4 = 3mn^3 \dots$; г) $12x^3y^5 = \dots 2xy^2$.
10. Запишіть вирази:
а) половина різниці чисел x і y ;
б) чверть добутку чисел a і b ;
в) подвоєна сума чисел m і n ;
г) потроєна частка чисел c і d .

III рівень

1. Обчисліть:
а) $\frac{2^4 \cdot 4^8}{8^5 \cdot 16}$; б) $\frac{27^2 \cdot 3^6}{81 \cdot 9^3}$; в) $\frac{3^5 \cdot 64}{2^3 \cdot 9^2}$; г) $\frac{125 \cdot 4^2}{128 \cdot 5^6}$.
2. Обчисліть:
а) квадрат різниці чисел 8 і -3 ;
б) різницю квадратів чисел 9 і -4 .
3. Розв'яжіть рівняння:
а) $9^3 : x = 27^2$; б) $x : 3^3 = \frac{1}{3}$;
в) $8^5 \cdot x = 16^4$; г) $(-0,5)^3 \cdot y = 0,25$.
4. Знайдіть помилки, якщо вони допущені, та виправте їх:
а) $a^8 : a^4 = a^2$; б) $x^3x^2 = x^5$; в) $b^8c^8 = bc^8$;
г) $b^8c^8 = (bc)^{16}$; г) $(mp^2)^3 = m^3p^5$; д) $(m^4n)^4 = m^{16}n^4$.
5. Запишіть вирази у вигляді степеня:
а) $3^2a^3a^5$; б) $a^3b^2 \cdot ab^6$; в) $2x^2 \cdot 2^4x^3y^5$; г) $c^2d^3 \cdot c^2d^5$.

6. Запишіть одночлени у стандартному вигляді:
 а) $-mn \cdot 0,5m^2n^4 \cdot 2m$; б) $2c^2 \cdot (-3c^2d)^3$;
 в) $(-8a^2b^3)^3 \cdot 2a^2b^3$; г) $-3xy^3 \cdot (3x^2y^2)^2$.
7. Запишіть вирази, якщо це можливо, як одночлени стандартного вигляду:
 а) $\frac{xy^2}{2}$; б) $\frac{a+b}{3}$; в) $2m + 5m$; г) $\frac{3ab}{c}$.
8. Допишіть замість крапок одночлени так, щоб утворилися тождества:
 а) $12a^4bc^3 = 4abc \dots$; б) $15m^8n^6p^3 = \dots \cdot 3m^4n^2p$;
 в) $36x^5y^2 = \dots (3xy)^2$; г) $-18k^3l^4m^5 = 6kl^2m^5 \dots$.
9. Запишіть вирази:
 а) половина добутку суми чисел x і y та їх різниці;
 б) квадрат третини добутку чисел a і b ;
 в) різниця квадратів чисел m і n ;
 г) куб половини різниці чисел k і l .
10. Спростіть вираз:
 а) $4^{2n} \cdot 4^{3n-1} \cdot 4^{5n+1}$; б) $4^n \cdot 2^{2n-1} \cdot 2^{3n}$.

IV рівень

1. Запишіть вираз зі змінною m , який не має числового значення, якщо:
 а) $m = 2$ і $m = -1$; б) $m = 4$; в) $m = -3$ і $m = 0$.
2. Обчисліть:
 а) $\left(3\frac{5}{9}\right)^2 \cdot (3,375)^3$; б) $\frac{5^{27} \cdot 4,6 + 2,7 \cdot 5^{28}}{25^{13}}$;
 в) $\frac{8 \cdot 1000^n}{2^{3n} \cdot 5^{3n}}$; г) $\frac{1000^n}{2^{3n+1} \cdot 5^{3n+2}}$.
3. Виконайте дії:
 а) $(-0,5x^ny)^3 \cdot 2xy^{4n}$; б) $(0,3a^{n+1}b)^2 \cdot \frac{5}{9}(ab^3)^3$;
 в) $\left(\frac{2}{3}x^2y^3\right)^3 \cdot (-9x^4y^2)^2$; г) $(-4c^{3m}d^5)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}c^3d^{2m-1}\right)^2$.

§2.

МНОГОЧЛЕН. ПЕРЕТВОРЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

2.1. Поняття многочлена та його стандартного вигляду



Пригадайте

1. Які доданки називають подібними? Наведіть приклади.
2. Поясніть, як зводять подібні доданки, виконавши зведення їх у виразах:
а) $4a + 3a + a$; б) $7b - 3c + 4b - 2b$.

① **Що таке многочлен.** Розглянемо рисунок 6. Місткість рефрижератора з причепом, зображеного на ньому, дорівнює $ac^2 + bch$.

Вираз $ac^2 + bch$ — це сума двох одночленів: ac^2 — місткість рефрижератора; bch — місткість причепа.

Площа зафарбованої фігури, зображеної на рисунку 7, дорівнює

$$ab - \pi r^2 - c^2,$$

де ab — площа прямокутника, πr^2 і c^2 — площі відповідно круга і квадрата, вирізаних із даного прямокутника.

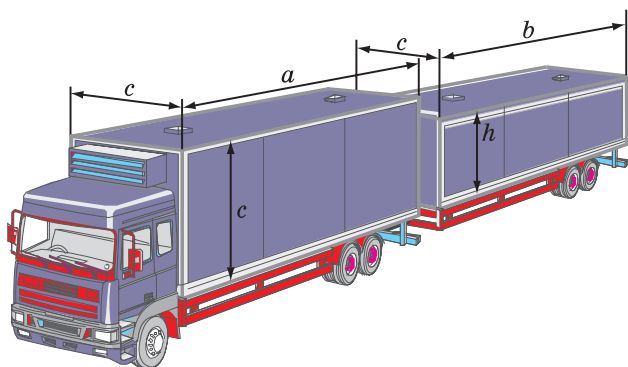


Рис. 6

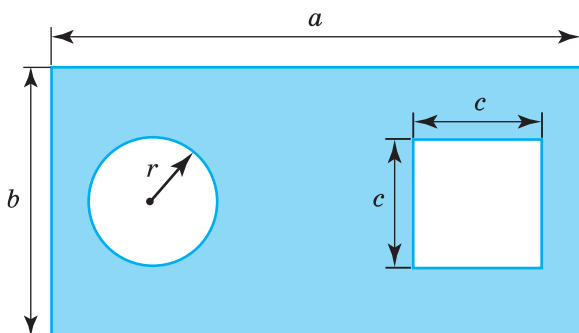


Рис. 7

Оскільки різницю двох виразів завжди можна записати у вигляді суми (наприклад, $a - b = a + (-b)$), то вираз $ab - \pi r^2 - c^2$ теж можна розглядати як суму одночленів:

$$ab - \pi r^2 - c^2 = ab + (-\pi r^2) + (-c^2).$$

Такі вирази називають *многочленами*.



Многочлен — це сума кількох одночленів.

Одночлени, які утворюють многочлен, називають **членами многочлена**.

Зокрема, многочлен $ac^2 + bch$ має два члени: ac^2 і bch ; членами многочлена $ab - \pi r^2 - c^2$ є вирази ab , $-\pi r^2$, $-c^2$.

Многочлен, що складається з двох членів, називають **двочленом**, многочлен, що містить три члени, — **тричленом**.

② Подібні члени многочлена та їх зведення. Вирази $4a + 3a + a$ і $7b - 3c + 4b - 2b$ є многочленами, тому подібні доданки, що входять до них, називають **подібними членами** цих многочленів. Подібні члени у многочлені відшукати неважко: це такі одночлени стандартного вигляду, які відрізняються між собою лише коефіцієнтом або нічим не відрізняються.

Наприклад, у многочлені $4a^2b - 3a^2b + 5a^2b + 4a^2b$ всі члени подібні; у многочлені $3mn - 4y^2 + 5mn + 1 + 3y^2$ подібними є перший і третій, а також другий і п'ятий члени.

Перша пара подібних членів підкреслена однією рисою, а друга — двома рисками.

Подібні члени, як і подібні доданки, можна зводити. Таке зведення виконують на основі розподільного закону множення:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Якщо поміняти місцями ліву і праву частини цієї рівності, то дістанемо: $ac + bc = a(b + c)$.

Скориставшись останньою тотожністю, вираз $5ay + 8ay$ можна перетворити так: $5ay + 8ay = ay(5 + 8) = 13ay$.

Оскільки розподільний закон множення стосується будь-якої кількості доданків, то зводячи подібні члени многочлена $4a^2b - 3a^2b + 5a^2b + 4a^2b$, маємо: $4a^2b - 3a^2b + 5a^2b + 4a^2b = a^2b(4 - 3 + 5 + 4) = 10a^2b$.

Зведення подібних членів многочлена застосовують для його спрощення. Для виконання цього перетворення користуються таким правилом:

щоб звести подібні члени многочлена, потрібно знайти суму їхніх коефіцієнтів і до одержаного результату дописати спільний буквенний множник.

Приклад. Звести подібні члени многочлена $2x^2 - 3xy - 5x^2 + 6xy$.

Розв'язання. Многочлен має дві пари подібних членів: $2x^2$ і $-5x^2$ та $-3xy$ і $6xy$. Коефіцієнти першої пари подібних членів дорівнюють 2 і -5 , а їхня сума: $2 + (-5) = -3$.

Коефіцієнти другої пари дорівнюють -3 і 6 , а їхня сума відповідно дорівнює: $-3 + 6 = 3$.

Отже, в результаті зведення першої пари подібних членів дістанемо $-3x^2$, а другої пари — дістанемо $3xy$. Записують таке перетворення так:

$$\underline{2x^2} - \underline{3xy} - \underline{5x^2} + \underline{6xy} = (\underline{2-5})x^2 + (\underline{-3+6})xy = -3x^2 + 3xy.$$

Згодом підкреслений проміжний запис можна пропускати.

Поряд із поняттям одночлена стандартного вигляду існує поняття многочлена стандартного вигляду.

Многочленом стандартного вигляду називають многочлен, що містить лише одночлени стандартного вигляду, серед яких немає подібних.

Наприклад, $5a^2b - 3a$ і $4x^2y - 5xy + y^2$ — многочлени стандартного вигляду. А многочлени $0,3a^2 - 6b^2b + 1$ чи $8x^2 - 2xy + x^2 - 3$ не є многочленами стандартного вигляду, оскільки у першому з них другий член не є одночленом стандартного вигляду, а в другому не зведено подібні члени $8x^2$ та x^2 .

Таким чином, щоб звести многочлен до стандартного вигляду, потрібно записати кожний член цього многочлена у стандартному вигляді і звести подібні члени.

Наприклад: $2a^2a + 3xy - 5a^3 = 2a^3 + 3xy - 5a^3 = -3a^3 + 3xy.$

Записувати члени у многочлені можна в різній послідовності. Інколи їх упорядковують за спадними степенями певної змінної, тобто розміщують члени з цією змінною у порядку поступового зменшення показника степеня даної змінної.

Наприклад, многочлен $4ax + 2x^3 - 3 + 5x^2$, упорядкований за спадними степенями змінної x , має вигляд: $2x^3 + 5x^2 + 4ax - 3$. Цей самий многочлен, упорядкований за зростаючими степенями x , матиме такий вигляд: $-3 + \underline{4ax} + \underline{5x^2} + \underline{2x^3}$.

Як і для одночлена, існує поняття степеня многочлена. Його визначають за найвищим степенем одночлена з усіх одночленів, що утворюють даний многочлен. Наприклад, серед членів многочлена $7m^2n - 4m^4 + 5m^3n^2 - 6$ найвищий степінь має член $5m^3n^2$; він дорівнює 5 ($3 + 2 = 5$). Тому кажуть, що даний многочлен

п'ятого степеня. Многочлен $x^4 - 15x^2y + y^3$ — четвертого степеня (найвищий степінь його члена x^4 дорівнює 4); многочлен $a^2 - 4ab + 3b^2$ — другого степеня, а многочлен $9x - 2$ — першого степеня.

У 1929 р. український видатний математик академік Михайло Кравчук (1892 – 1942) одержав фундаментальні результати в галузі вищої алгебри. У світовій літературі їх називають многочленами Кравчука. Можна тепер процитувати більше сотні наукових праць за останні 80 років, в яких многочлени академіка Кравчука досліджувано, узагальнювано, вказано їх різноманітне застосування, починаючи з теоретичних питань математики, кінчаючи різними розділами фізики. М.П. Кравчук за допомогою своїх многочленів довів нові формули в математиці.



Запитання для самоперевірки

1. Що таке многочлен? Наведіть приклади.
2. Які члени многочлена називають подібними? Наведіть приклади.
3. Як звести подібні члени многочлена? Проілюструйте прикладом.
5. Які перетворення многочлена слід виконати, щоб звести його до стандартного вигляду?
6. Як визначити степінь многочлена?



Задачі та вправи

108°. Назвіть і запишіть члени многочленів:

- а) $3a + 4b - c$; б) $4,2a^2 - \frac{3}{4}b + c$; в) $-2,5a^2 + 2a - 1$;
г) $4,5a^2 - 3a + b$; ґ) $8a^2 - \frac{4}{7}b - \frac{2}{3}$; д) $-4,5a + 2,7a^2 - 5b^3$.

109°. Запишіть многочлени у вигляді суми одночленів:

- а) $3ab - 4a^2 + 3,5b^2 + 3,5ab$; б) $-1,5x^4 + 3x^2 - 12x - 0,4$;
в) $-\frac{4}{7}xy - 1,2x^2 - 4,5y^2$; ґ) $2,5x^3 - 2x^3 - 2x^2 + 4x - 7$.

Зразок. $4,8x^2 - \frac{1}{3}xy - 2x = 4,8x^2 + \left(-\frac{1}{3}xy\right) + (-2x).$

110°. Запишіть суму одночленів:

- а) $4a$ і $0,8b$; б) $-4a^2$ і $2b$; в) $3,5a$ і $\frac{1}{2}a^2$;
 г) $\frac{3}{4}a$ і $\frac{1}{2}b$; і) $-3,5a^2$ і $3a$; д) $7,5a$ і $\frac{3}{2}b$;
 е) $5m^2$, $-6mn$ і -8 ; є) $2,1x^3$, $-7x^2$, $0,9xy^2$ і $-y$.

111°. Утворіть многочлени з таких одночленів:

- а) a^2 , $-2ab$, 3 ; б) $5x^2$, $4x^2y$, $-6x^2$, -1 ;
 в) $-0,2c$, $9,2d^2$, $-5cd^3$, 1 ; г) $-2m$, $4m^3n$, $-3n^2$, $-8m^2n^4$.

112. Упорядкуйте два останні многочлени із вправи 111 спочатку за спадними, а потім за зростаючими степенями кожної змінної.

113. Які з виразів є многочленами:

- а) $x + 3$; б) $m^2 - 8m + n$; в) $a(a - 3)$;
 г) $(4 - x)^2$; і) $p^3 - 3p + g + 1$; д) $b^2 + 2(b - c)$;
 е) $\frac{x}{2} + y^2 - 1$; є) $3x^2m - 2(1 - mx)$?

114°. Зведіть подібні члени многочленів:

- а) $18a - 15a$; $-12a + 18a$; $14a^2 - 29a^2$; $8,9a^3 - 1,9a^3$;
 б) $7,5a^2 - 14a^2$; $4\pi r^2 - 3\pi r^2$; $2\pi r + 8\pi r$; $\pi r^2 + 2\pi r^2$;
 в) $7a^3 - 2a^3 - 1,5a^3$; $4,5xy - 2,6xy$; $3xy - 5x - 1,8xy$;
 г) $8,4a^2h - 4,7a^2h + a^2h$; $3\pi r^2 - 1,5\pi r^2$; $\pi r^2h - 0,5\pi r^2h$.

115. Знайдіть допущені помилки і виправте їх:

- а) $x + x = x^2$; б) $3a + 7a = 10a$; в) $7a - 3a = 4$;
 г) $12x - x = 12$; і) $x^5 - x^2 = x^3$; д) $2a + 3b = 5ab$;
 е) $2ab + 3ab = 5ab$; є) $12x - x = 11x$.

Зведіть подібні члени многочленів (116–117):

- 116°.** а) $0,3c^3 - 3c^2 - 0,5c^3 + c^2$; б) $4x^2 - 7y^2 - 6y^2 + 3x^2$;
 в) $5ab + 4a^2b^2 + 8a^2b^2 - 3ab$; г) $2y^2 - 3y + 2y - y^2$.
117. а) $11m^2 + 4mn - m^2 - 4mn$; б) $-c^3 - d^3 + 2c^3 - d^3$;
 в) $\frac{2}{5}xy - 0,2x^2y + \frac{5}{6}xy + 4,5x^2y$; г) $6\pi r^2h - 1,5\pi r^2h + \pi rh$.

118°. Запишіть многочлени у стандартному вигляді:

а) $2,4m^2 - 4n^2n + 6m^2 - n^3$; б) $x^4 - 2x \cdot 4y^2 - x^2x + 5xyy$;

в) $a - 5a \cdot 3ab + 7b \cdot 2a^2 + a$; г) $b^{10} - b^6 - b^2b^4 - b^9b + 2b^6$.

119. Спростіть вирази:

а) $-9m^2 \cdot \frac{1}{3}n + m^2n + 24m \cdot \frac{1}{3}mn$;

б) $2ab \cdot \frac{1}{2}ac - 2a \cdot 2ac - a^2bc + 10a^2 \cdot \frac{1}{2}c$;

в) $2abc \cdot 5a + 1\frac{5}{7}a^2 \cdot \frac{7}{12}bc - 2\frac{2}{3}ab \cdot \left(-\frac{2}{3}a\right)$;

г) $3xy + 2a^2b - 3a^2 \cdot 0,5b^2 - 2a^2 \cdot 1,5b + 5a^2 \cdot 0,5b^2 + 2ab$;

г) $8c^2 \cdot 4cd^2 - 5cd \cdot (-9cd^2) - 4c \cdot 5d \cdot 2c^2d$;

д) $5x^2 \cdot 3xy^2 - 4xy \cdot (-8xy^2) - 3x \cdot 5y \cdot 4x^2y$.

120*. Запишіть вираз для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку 8, та обчисліть її, якщо $a = 4$ дм, $b = 1,6$ дм.

121*. Запишіть вираз для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку 9, якщо кожен із двох отворів — круг, радіус якого дорівнює r . Обчисліть площу фігури, якщо $a = 4$ дм, $b = 2$ дм, $r = 4$ см.

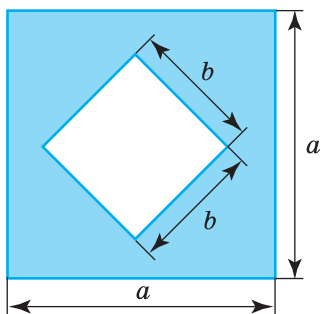


Рис. 8

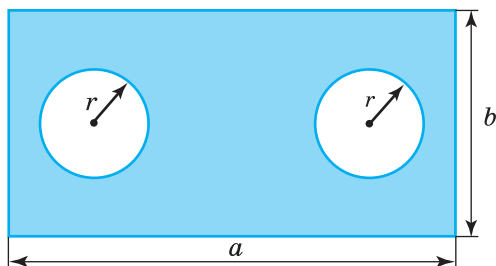


Рис. 9

122*. Складіть вирази для обчислення площі S і довжини лінії, якою обмежена кожна з фігур, зображених на рисунку 10.

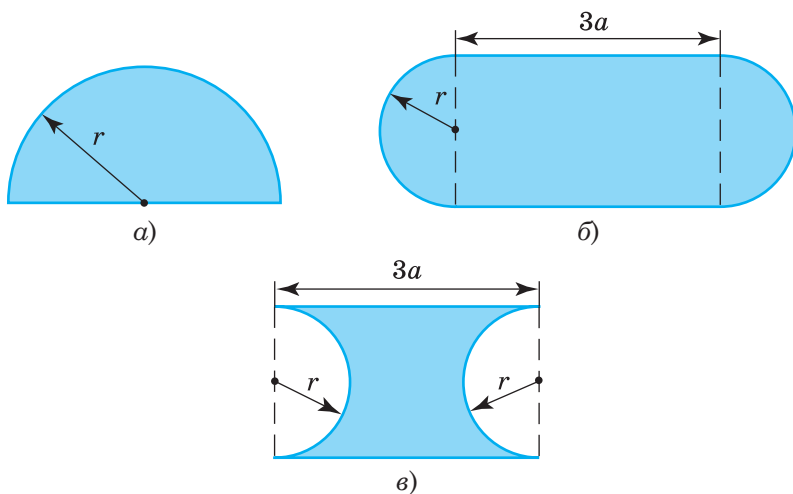


Рис. 10

2.2. Сума і різниця многочленів

! Пригадайте

1. Як розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+»?
2. Як розкрити дужки, перед якими стоїть знак «-»?

① **Як знайти суму многочленів.** Розглянемо трикутник, зображений на рисунку 11. Його периметр P дорівнює сумі довжин сторін: $P = AB + BC + AC$.

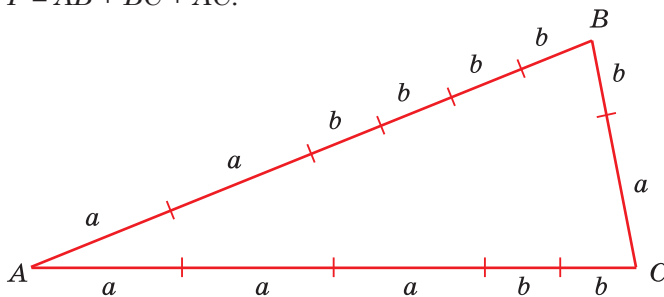


Рис. 11

Оскільки $AB = 2a + 4b$, $BC = a + b$, $AC = 3a + 2b$, то

$$P = (2a + 4b) + (a + b) + (3a + 2b).$$

Знайдений вираз є сумою трьох многочленів: $2a + 4b$, $a + b$ і $3a + 2b$. Розкривши дужки і звівши подібні члени, дістанемо:

$$(2a + 4b) + (a + b) + (3a + 2b) = 2a + 4b + a + b + 3a + 2b = 6a + 7b.$$

Отже,

щоб знайти суму многочленів, потрібно спочатку скласти відповідний вираз, узявши многочлени-доданки в дужки і поставивши між ними знак «+», а потім перетворити одержаний вираз, розкривши дужки і звівши подібні члени.

Приклад 1. Знайти суму многочленів $c^2 - 5cd + 1$ і $8cd - 3$.

Розв'язання. $(c^2 - 5cd + 1) + (8cd - 3) = c^2 - 5cd + 1 + 8cd - 3 = c^2 + 3cd - 2$.

② Як знайти різницю многочленів. Різницю многочленів знаходять аналогічно.

Наприклад, щоб від многочлена $3x^2 + 10y$ відняти многочлен $7y - 2$, спочатку складають відповідний вираз — різницю цих многочленів, узявши їх у дужки і поставивши між ними знак «-»: $(3x^2 + 10y) - (7y - 2)$. Потім вираз перетворюють, розкриваючи дужки і зводячи подібні члени:

$$(3x^2 + 10y) - (7y - 2) = 3x^2 + 10y - 7y + 2 = 3x^2 + 3y + 2.$$

Надалі можна не брати в дужки перший многочлен, бо це не впливає на результат віднімання або додавання.

Завдання знаходження суми або різниці многочленів можна сформулювати по-різному:

- а) додайте або відніміть многочлени;
- б) знайдіть суму або різницю виразів;
- в) знайдіть суму або різницю многочленів.

У кожному з таких випадків спочатку записують суму або різницю даних многочленів (якщо її ще не утворено), а потім перетворюють одержаний вираз. Коли ж вираз, що є сумою (різницею) многочленів, уже записано, то його потрібно лише спростити, тобто перетворити у многочлен стандартного вигляду, розкривши дужки і звівши подібні члени.

Приклад 2. Спростити вираз $3m - 12n - (7m + 2n)$.

Розв'язання. $3m - 12n - (7m + 2n) = 3m - 12n - 7m - 2n = -4m - 14n$.

③ Як узяти многочлен у дужки. Ви вже знаєте, як записати суму або різницю многочленів і перетворити одержаний вираз у многочлен.

Часто доводиться виконувати обернене перетворення — даний многочлен записувати у вигляді суми або різниці двох многочленів.

Наприклад, многочлен $3m + 2n + 4a - b$ можна подати у вигляді суми двох многочленів так:

$$3m + 2n + 4a - b = 3m + 2n + (4a - b),$$

а у вигляді різниці многочленів так:

$$3m + 2n + 4a - b = 3m + 2n - (-4a + b).$$

Розкривши дужки, легко встановити, що записи виконано правильно.

Головне у таких перетвореннях — правильно записати многочлен, який має бути в дужках. Для цього слід користуватися таким правилом:

знаки членів многочлена, взятого в дужки, не змінюють, якщо перед дужками ставлять знак «плюс», і змінюють на протилежні, якщо перед дужками ставлять знак «мінус».

Запишемо, користуючись цим правилом, многочлен $7a^4 - 3b - 10b^2 + 6d^3 - c^4$ у вигляді суми двочлена і тричлена, утворених відповідно з двох перших і трьох останніх членів даного многочлена. Оскільки для утворення такої суми перед узятим у дужки тричленом слід поставити знак «плюс», то знаки його членів залишаються такими самими, які вони були у многочлені. Маємо:

$$7a^4 - 3b - 10b^2 + 6d^3 - c^4 = 7a^4 - 3b + (-10b^2 + 6d^3 - c^4).$$

Записуючи даний многочлен у вигляді різниці тих самих двочлена і тричлена, знаки взятих у дужки трьох останніх членів даного многочлена слід змінити на протилежні, бо для утворення різниці перед дужками потрібно поставити знак «мінус». Отже,

$$7a^4 - 3b - 10b^2 + 6d^3 - c^4 = 7a^4 - 3b - (10b^2 - 6d^3 + c^4).$$

Корисно пам'ятати і ще одне правило:

щоб змінити знаки членів многочлена, який стоїть у дужках, на протилежні, потрібно змінити на протилежний знак, що стоїть перед дужками.

Наприклад:

$$1) a + (6b - c) = a - (c - 6b);$$

$$2) m - (3x - 5y) = m + (5y - 3x);$$

$$3) c - n(-2a + b - 2d) = c + n(2a - b + 2d).$$



Запитання для самоперевірки

1. Запишіть два многочлени. Знайдіть їхню суму, а потім їхню різницю. Які тотожні перетворення вам довелося виконати при цьому?
2. Що слід зробити зі знаками всіх членів многочлена, який беруть у дужки зі знаком «+» перед ними, щоб дістати вираз, тотожний даному многочлену?
3. Що слід зробити зі знаками всіх членів многочлена, який беруть у дужки зі знаком «-» перед ними, щоб дістати вираз, тотожний даному многочлену?



Задачі та вправи

123°. Розкрийте дужки:

$$а) (4m - 3n);$$

$$б) 1 + (2x + 5y);$$

$$в) (7a - 3) + (4b - 8c);$$

$$г) -(9xy + 2);$$

$$г) -(13c - d^2);$$

$$д) 20 - (x^2 - xy + y^2);$$

$$е) (a - b) + (c - d) - (x + y);$$

$$е) x + (3a - 1) - (m - 2n - 5).$$

124°. Знайдіть і виправте помилки в рівностях:

$$а) x + (2y - 3z) = x + 2y - 3z;$$

$$б) -(x + y) + 5 = -x + y + 5;$$

$$в) 8 + (a + 3b) = 8a + 3b;$$

$$г) -(x + y) + 5 = -x - y - 5;$$

$$г) 3m - (c + 5d) = 3m - c + 5d;$$

$$д) -(x + y) + 5 = -x - y + 5;$$

$$е) (a - b) - (c - d) = a - b - c + d;$$

$$е) m - (2n + 1) = m - 2n - 1.$$

125°. Спростіть вирази:

$$а) 11a^2 + 7a + (9a^2 - 5a);$$

$$б) 5b + (3b - 2c) + (b - 2c);$$

$$в) 3x^2 - 5y + (2x^2 - 3y) + (6x^2 + 4y);$$

$$г) m^2 - 2n - (5m^2 + 4n);$$

- г) $4x^2y + 8xy - (3x^2y - 5xy^2) + (2x^2y + x^2y)$;
 д) $m - (3m - 4) - (m + n)$;
 е) $4 + (x^2 - 3x + 2) - (2x^2 + 4x - 1)$;
 є) $a + 3 - (a + 2) - (a^2 - 4a - 4)$.

Знайдіть суму і різницю многочленів (126–128):

- 126°.** а) $3x + 28y + 16z$ і $12x + 7z + 6y$;
 б) $3a + 42b + 4c$ і $11a + 12b$;
 в) $3,7xy + 8x^2 - \frac{2}{3}y$ і $12x^2 - 1\frac{1}{3}y + 4,5$;
 г) $\frac{3}{4}x + 1,4y - 3xy$ і $1,6y + 1,25x$.

- 127°.** а) $4x + 12y + 4,5$ і $2x + 7y + 3,5$;
 б) $14x^2 + 14x - 3,5$ і $9x^2 - 2,5x + 8$;
 в) $4,5xy - 3,2x + 1,2$ і $4,7xy - 4x + 0,8$;
 г) $2\frac{3}{5}xy + 3,5x - 8$ і $4,2xy + 4,6x - 4,7$.

- 128.** а) $6,5x^2 - 7xy + 4x$ і $8,3xy + 2,5x^2 - 3,2x$;
 б) $\frac{7}{8}x - 1,8xy$ і $-1,2xy - \frac{1}{8}x$;
 в) $-8,5x + 3,8y - 0,8$ і $-6,7x + 6,9y$.

- 129*.** Дано три многочлени: $A = a^2 - b^2 + ab$, $B = 2a^2 + 3ab - 5b^2$ і $C = -4a^2 + 2ab - 3b^2$. Знайдіть:

а) $A + B - C$; б) $A - B + C$; в) $A - B - C$; г) $A + B + C$.

- 130*.** Знайдіть многочлен M , якщо:

а) $3x^2 - xy - 3 + M = 5x^2 - xy + 1$; б) $M - (a^2 - 3a + 5) = 6a + 1$.

- 131.** Користуючись схемою, зображеною на рисунку 12, з'ясуйте, які операції і з якими многочленами виконує машина. Знайдіть остаточний результат.

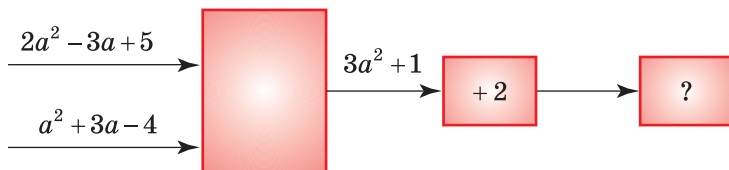


Рис. 12

Обчисліть значення виразів, попередньо спростивши їх (132–133):

132°. а) $(a^2 + 4b - ab) + (-4b + a^2 + ab)$, якщо $a = 0, 4$;
 б) $(a^2 + 9b - 6a) - (a^2 - 4b + 2,5b)$, якщо $a = 0, 5$, $b = 2$;
 в) $(4a - 8b + c) - (a - 8b + c)$, якщо $a = 4, 25$;
 г) $a^2 - 2ab - (3a^2 - ab + a) + (2a^2 + 3ab - b)$, якщо $a = 2, 2$, $b = -1, 8$.

133*. а) $(5x^2 - 7xy) + (7y^2 - 5xy)$, якщо $x = 4, y = -3$;
 б) $\left(\frac{4}{5}a - 0,4b\right) - \left(-1,7a + \frac{3}{4}b\right)$, якщо $a = 5, b = 4$.

Розв'яжіть рівняння (134–135):

134°. а) $(17 - 5x) - (3x - 11) = 4$;
 б) $(43 - 12x) - (33 - 7x) = 4$;
 в) $(12,8 - 0,7x) - (15,8 - 0,5x) = 1$;
 г) $(23,7 - 0,6x) - (12,2 - 0,8x) = 2,1$.

135. а) $(4x^2 + 12x + 9) - (7x + 4x^2 + 1) = 4$;
 б) $(10x^3 - 7x^2 - 9x + 13) + (1 - 10x^3 + 7x^2) = 5$;
 в) $(5 - 8x^3 + 7x^2 - 6x) + (8x^3 - 7x^2 - x) = -9$;
 г) $x - (5x + 1) = 4x + 1 + (2x - 3)$.

136*. Доведіть, що за будь-яких значень a вирази набувають лише додатних значень:

а) $5a^2 - 4a - (3a^2 - 4a - 2)$;
 б) $3a^4 + 2a + (2a^2 - 6a - 7) - (a^2 - 4a - 10)$;
 в) $a^2 - 4a - (6a^2 - 7a + 5) - (3a - 5a^2 - 6)$;
 г) $a^2 + 2 - (4a - a^2 - 12) + (4a + 5)$.

137*. Запишіть многочлен $a^4 - 2b^3 - 4a^2 + 5a - 3$ у вигляді:

- а) суми двочлена $a^4 - 2b^3$ і тричлена;
- б) різниці двочлена $a^4 - 2b^3$ і тричлена.

138*. Який двочлен потрібно додати до многочлена $x^2 + 2y^2 - 3xy + 1$, щоб дістати многочлен, що не містить:

а) змінної x ; б) змінної y ?

139. Запишіть вирази у вигляді многочленів і спростіть їх:
а) $\overline{abc} + \overline{cba}$; б) $\overline{abc} - \overline{ba}$; в) $\overline{abc} + \overline{bc}$; г) $\overline{abc} - \overline{ac}$.

Примітка. Запис $\overline{abc}$ позначає натуральне число, яке має c одиниць, b десятків і a сотень. Тобто $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

140*. Доведіть, що:

- а) сума трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3;
- б) сума чотирьох послідовних непарних чисел ділиться на 8.

141*. Знайдіть різницю двоцифрового числа і суми його цифр. Чи ділиться ця різниця на 3?

142*. Доведіть, що:

- а) різниця трицифрового числа і суми його цифр ділиться на 9;
- б) різниця трицифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 99.

143*. Доведіть, що:

- а) сума чисел $\overline{ab}$ і $\overline{ba}$ кратна сумі a і b ;
- б) різниця чисел $\overline{abc}$ і $\overline{cba}$ ділиться на 9.

144*. До задуманого числа справа приписали 0 і одержане число відняли від 143. У результаті дістали задумане число. Яке число задумали?

2.3. Добуток одночлена і многочлена. Розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки



Пригадайте

Запишіть розподільний закон множення відносно додавання для випадку:

- а) двох доданків у сумі;
- б) трьох доданків у сумі.

① Добуток одночлена і многочлена. Аналізуючи тотожність, що є записом розподільного закону множення для трьох доданків $a(b + c + d) = ab + ac + ad$, бачимо, що ліва частина цієї тотожності

є добутком одночлена a і многочлена $b + c + d$, а права частина — многочленом, який дістали внаслідок перетворення цього добутку. Щоб вивести правило такого перетворення, звернемо увагу, що кожен член останнього многочлена є добутком одночлена a і відповідного члена даного многочлена $b + c + d$.

Отже,



добуток одночлена і многочлена дорівнює сумі добутків цього одночлена і кожного члена многочлена.

Оскільки добуток — результат множення, а сума — результат додавання, то це твердження можна сформулювати інакше:

щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно помножити одночлен на кожний член многочлена і одержані добутки додати.

Скористаємось цим правилом для перетворення добутку одночлена $2x$ і многочлена $3x^2 - xy + 5y^2$ у многочлен. Маємо:

$$2x(3x^2 - xy + 5y^2) = \underline{2x \cdot 3x^2} + \underline{2x \cdot (-xy)} + \underline{2x \cdot 5y^2} = 6x^3 - 2x^2y + 10xy^2.$$

У подальшому, виконуючи подібні перетворення (без підкреслення цієї фрази; підкреслити слід вираз, що стоїть над нею) підкреслений проміжний запис можна пропускати.

② **Винесення спільного множника за дужки.** Помінявши місцями ліву і праву частини тотожності $a(b + c + d) = ab + ac + ad$, маємо:

$$ab + ac + ad = a(b + c + d).$$

Бачимо, що многочлен $ab + ac + ad$ записано у вигляді добутку множника a , що є спільним для всіх членів многочлена, та іншого многочлена $b + c + d$.

Таке перетворення називають **розкладанням многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки**.

Якщо спільний множник виокремлено, то розкладання на множники не викликає труднощів.

Наприклад:

$$1) a^2 \cdot 2b - a^2 \cdot 3cd = a^2(2b - 3cd);$$

$$2) 3x \cdot 5y^2 + 3x \cdot 2 = 3x(5y^2 + 2);$$

$$3) 3x \cdot 5y^2 - 3x \cdot 4y + 3x = 3x(5y^2 - 4y + 1).$$

УВАГА! Часто у випадках, подібних до останнього, припускаються помилки, записуючи: $3x \cdot 5y^2 - 3x \cdot 4y + 3x = 3x(5y^2 - 4y)$.

У неправильності одержаної відповіді легко переконатися, перетворивши добуток $3x(5y^2 - 4y)$ у многочлен. Суть помилки полягає в тому, що «загубився» третій член многочлена. Щоб цього уникнути, на перших порах варто використовувати підкреслений проміжний запис:

$$3x \cdot 5y^2 - 3x \cdot 4y + 3x = \underline{3x \cdot 5y^2} - \underline{3x \cdot 4y} + \underline{3x \cdot 1} = 3x(5y^2 - 4y + 1).$$

Для самоконтролю варто пам'ятати, що кількості членів даного многочлена і многочлена в дужках мають бути однакові.

У більшості випадків спільний для всіх членів многочлена множник доводиться виокремлювати самостійно. Для цього достатньо:

знайти найбільший спільний дільник модулів коефіцієнтів усіх членів многочлена, взятий зі знаком «+» або знаком «-», і дописати до нього як множники змінні, що одночасно входять до всіх членів многочлена, — кожну змінну з найменшим показником, який вона має в даному многочлені.

Приклад. Знайти спільний множник для членів многочлена $12a^3b^3 - 8a^2b^5c$.

Розв'язання. Найбільший спільний дільник 12 і 8 дорівнює 4. До обох членів многочлена входять лише дві змінні a і b . Найменший показник степеня змінної a у многочлені дорівнює 2, змінної b дорівнює 3. Отже, спільним множником є вираз $4a^2b^3$ або $-4a^2b^3$.

Крім знаходження спільного множника, який потім виносять за дужки, важливо вміти записати кожний член многочлена у вигляді добутку цього спільного множника й іншого одночлена, тобто: $12a^3b^3 - 8a^2b^5c = \underline{4a^2b^3} \cdot 3a - \underline{4a^2b^3} \cdot 2b^2c$.

Отже,

щоб розкласти многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки, потрібно:

1) *знайти спільний множник членів многочлена;*

2) записати кожний член многочлена у вигляді добутку знайденого спільного множника та відповідного одночлена;

3) записати спільний множник перед дужками, а в дужках — многочлен, що залишається.

Наприклад: $12x^2y^3 - 16x^3y^2 = \underline{4x^2y^2} \cdot 3y - \underline{4x^2y^2} \cdot 4x = 4x^2y^2(3y - 4x)$.

Згодом підкреслений проміжний запис $4x^2y^2 \cdot 3y - 4x^2y^2 \cdot 4x$ можна пропустити.

За дужки можна винести спільний множник, який є не одночленом, а, наприклад, двочленом або будь-яким іншим многочленом.

Наприклад, у виразі $c^2(2m + n) - 3d(2m + n)$ спільним множником є двочлен $2m + n$, а у виразі $2x(3a - b + 4) + 5y(3a - b + 4)$ — тричлен $3a - b + 4$.

Перетворивши ці вирази, маємо:

$$c^2(2m + n) - 3d(2m + n) = (2m + n)(c^2 - 3d);$$

$$2x(3a - b + 4) + 5y(3a - b + 4) = (3a - b + 4)(2x + 5y).$$

УВАГА! Перетворюючи вирази, не забувайте брати в дужки многочлен, який винесено за дужки. Уникайте помилок на зразок:

$$c^2(2m + n) - 3d(2m + n) = 2m + n \cdot (c^2 - 3d).$$

Отже, на основі розподільного закону множення стосовно додавання можна виконати два тотожні перетворення: перетворити добуток одночлена і многочлена у многочлен, і навпаки — розкласти многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки.

Перетворення добутку одночлена
і многочлена у многочлен



$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$



Розкладання многочлена на множники
способом винесення спільного множника за дужки



Запитання для самоперевірки

1. Які два перетворення виразів виконують на основі розподільного закону множення?
2. Як перетворити добуток одночлена і многочлена у многочлен?
3. Як виконати розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки? Поясніть на прикладі.



Задачі та вправи

145°. Виконайте множення:

- | | | |
|---------------------|--------------------------------|--------------------------|
| а) $12(a + 4)$; | б) $3(x - 7)$; | в) $6(x + 2y)$; |
| г) $9(a - 4b)$; | г) $(x^2 - 8x) \cdot 5$; | д) $(3a + 4b) \cdot 9$; |
| е) $7(a - b + c)$; | е) $(2a - 4b + 5c) \cdot 12$; | ж) $8(3a^2 - 4b - 6)$. |

Запишіть вирази у вигляді многочленів (146–148):

- | | |
|--|--|
| 146°. а) $(20,5x + 8,2y) \cdot 4$; | б) $a(3x - 4y - 12z)$; |
| в) $-8x(11 - 12x)$; | г) $-5a(12a - 14b + 15c)$; |
| г) $-3x^2(-x^3 + x - 7)$; | д) $(x^2y - xy^2 - xy) \cdot 3xy^2$. |
| 147°. а) $-4,5x(2x - 3)$; | б) $\frac{2}{3}a(3a - 6b + 15c)$; |
| в) $-2,5a(a - b)$; | г) $0,5x(x^2 - 6x + 10)$. |
| 148*. а) $(6a^2 - 7ab)(-a)$; | б) $(5k^2 - 3k + 1,2)(-0,4k)$; |
| в) $1,3a(a^2 - 3a)$; | г) $(1 - 0,4a + 0,6ab)(-0,7a)$; |
| г) $12a(6a - 7b)$; | д) $(4a^2 - 3a - 1)\left(-\frac{7}{8}a\right)$. |

- 149.** Бічна сторона прямокутника дорівнює a м, основа — на 4 м довша. Визначте периметр і площу прямокутника. Периметр знайдіть двома способами. Доведіть, що вирази тотожні.
- 150.** Із двох міст назустріч один одному рухаються автомобілі. Швидкість одного — v км/год, другого — u км/год. Через t годин вони зустрілися. Яка відстань між містами? Задачу розв'яжіть різними способами. Доведіть, що одержані вирази тотожні.

151. Від пристані вниз річкою одночасно відпливли пліт зі швидкістю v км/год і катер, власна швидкість якого u км/год. Якою буде відстань між плотом і катером через t год? Розв'яжіть задачу двома способами. Доведіть, що одержані вирази тотожні.

152°. Спростіть вирази:

а) $(a + b) + b(a - b)$;

б) $2a^2 - a(2a - 5b)$;

в) $3(x + y) - 5(x - y)$;

г) $-2(a - 3b) + a(2 - b)$;

г) $m(m + n) - 3(m^2 + mn)$;

д) $0,5x(2x - 4y) - 2y(3y - x)$.

153. виправте допущені помилки і запишіть правильно:

а) $a - 3(a^2 + b) = a - 3a^2 + 3b$; б) $-x^2 + x(y - 2) = x^2 + xy - 2x$;

в) $m - n(-m - 5) = m + mn - 5n$; г) $3x \cdot 2(x + y) = 6x(3x^2 + 3xy)$.

Спростіть вирази (154–156):

154°. а) $15(2a - 3b) - 12(3a - 2b)$; б) $17a(a - b) - 18b(2a - 5b)$;

в) $12,5(6a - 4b) - 3(8a - b)$; г) $19a(a - b) - 21b(2a - 3b)$.

155. а) $(a^2 - 1) \cdot 0,4x - 5x(2 - x^2)$; б) $-0,8a(7a - 1) - 0,9a(4a - 1)$;

в) $4a(x - 8) - 18x(3a - 1)$.

156*. а) $4\frac{1}{3}a^2 - 0,4(2,5a^2 + a - 1)$; б) $4,5a^2 - 3,8a - 0,5a(6a - 7)$;

в) $3,2a(a^2 - a + 1) + (-3,2a^3 + 3,2a^2)$.

157°. Перетворіть вирази у многочлени стандартного вигляду:

а) $2m^2 - m(2m - 5n) - n(2m - n)$;

б) $6x^2 - 5x(-x + 2y) + 4x(2,5y - 3x)$;

в) $10a(5a^2 + 2b) - 6a(3b + 7a^2) - 3ab$;

г) $4c(5d - 2c) - (3c - 2d) \cdot 2c$.

158*. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

а) $5(2n - 1) - (n - 14)$ ділиться на 9;

б) $7(3n - 1) - (n + 3)$ ділиться на 10;

в) $5(2n - 1) - 2(4n - 2,5)$ є парним числом.

159*. Значення якого з виразів при будь-якому цілому значенні n ділиться на 3:

а) $5n(n + 2) - 2(n^2 - 5) - 7n + 6$; б) $3n(n - 2) + 6(n + 1)$;

в) $n(3n - 1) + 4(n + 1)$; г) $7n(n - 3) - 2(2n - 1)$?

- 160.** Доведіть тотожності:
 а) $a(a + b) - b(a - b) = a^2 + b^2$; б) $b(a + b) - b(a - b) = 2b^2$;
 в) $n(n + 1) - n(n - 1) = 2n$; г) $3(a^2 - ab) - a(2a - 3b) = a^2$.
- 161.** Розв'яжіть рівняння:
 а) $3(x - 5) + 18 = 48$; б) $5x - 4(x - 3) = 10$;
 в) $6(x - 3) + 2(x + 2) = 10$; г) $5(y - 1) - 3(y - 3) = 0$;
 р) $2x - 3(x + 4) = 4(x + 2)$; д) $x(x - 2) + 3 = x(x - 5)$.
- 162°.** Знайдіть спільні множники для одночленів:
 а) $3x^2$ і $6x^3$; б) $6a^2x$ і $12ax^2$;
 в) $9a^2$ і $-6a^2b$; г) $4x^3y^3$ і $8x^2y^2$;
 р) $6a^3$; $3ab$; $9ab^2$; д) $-40m^4n^2$; $25m^3n^3$; $20m^2n^4$.
- 163°.** Внесіть спільний множник за дужки:
 а) $3m \cdot 4n + 3m \cdot p$; б) $5x \cdot 4y^2 + 5x \cdot 2y + 5x \cdot 3$;
 в) $2x^2 \cdot y^2 - 2x^2 \cdot z + 2x^2 \cdot 4$; г) $ab \cdot 7x + ab \cdot 6y + ab$.
- 164°.** Запишіть відповідні одночлени з попередньої вправи у вигляді добутку двох множників, один із яких — знайдений спільний множник.
- 165.** Заповніть пропуски так, щоб утворилися тотожності:
 а) $4a^2 \cdot (... - ...) = 20a^5 - 4a^2$; б) $(2x^2 - ...) \cdot 3x^3 = ... - 15x^4$;
 в) $(4a^2 - 3b^2) \cdot ... = -8a^2b - ...$; г) $(11a^2 - ...) \cdot ... = 1,1a^3 - 0,3a$;
 р) $... \cdot (3x^4 - ...) = 3,6x^6 - 4,8ax^2$; д) $-3x^2 \cdot (... - 0,4x) = 3x^3 - ...$.
- 166.** Розкладіть вирази на множники:
 а) $14xy - 21y$; б) $6ab - 3bc$; в) $-15ax - 20ay$;
 г) $mn - n^2$; р) $y^3 + y^4$; д) $x^2y + xy^2$;
 е) $a^3b^2 - a^2b^3$; е) $3a^2x + 6ax^2$; ж) $9a^4 - 12a^3b$;
 з) $5xy^2 - 10x^3y^4$; и) $3x^3y^3 + 15x^2y^2$; і) $9m^4 - 6m^3$.
- 167.** Не обчислюючи значення виразу, доведіть, що:
 а) $73^2 - 73 \cdot 17$ ділиться на 8; б) $97 \cdot 24 + 97^2$ ділиться на 11;
 в) $12^3 + 12^2$ ділиться на 13; г) $49^4 - 49^3$ ділиться на 24.
- 168.** Доведіть, що:
 а) $5^6 - 5^5 + 5^4$ ділиться на 7; б) $27^3 - 3^7$ ділиться на 8;
 в*) $10^4 + 5^3$ ділиться на 9; г*) $21^3 - 14^3 - 7^3$ ділиться на 5.

169°. Знайдіть значення виразів, попередньо розклавши їх на множники:

а) $5ab + a^2$, якщо $a = 1,15$, $b = 0,17$;

б) $4m^2 - mn$, якщо $m = 1,47$, $n = 5,88$;

в) $a^2y - a^3$, якщо $a = -3,5$, $y = 6,5$;

г) $3,27b + b^2$, якщо $b = -2,27$;

г) $-x^2 - xy$, якщо $x = 0,3$, $y = 9,7$;

д) $4p^2x + 4px^2$, якщо $p = \frac{1}{4}$, $x = 2\frac{3}{4}$.

170°. Подайте у вигляді добутку:

а) $30a - 75b + 15$;

б) $17a - 17b - 34$;

в) $5x^2 - 10xy + 5y^2$;

г) $a^3 - 2a^2 - a$;

г) $m^4 + 3m^3 - m^2$;

д) $5x + 15xy + 10ax$;

е) $3ab - 9ac - 12ad$;

е) $12ax^3 - 8ax^2 + 4ax$;

ж) $3a^2b^3 + 6a^2b^2 - 18a^4b^4$;

з) $16a^4 - 8a^3 - 4a^2$.

171. Обчисліть зручним способом:

а) $5,83 \cdot 19 + 5,83 \cdot 54 + 5,83 \cdot 27$; б) $16,22 + 14,8 \cdot 16,2 - 16,2$.

172. Знайдіть допущені помилки і виправте їх:

а) $2x^2y - 6x^3y^3 + 4xy = 2x(xy - 3x^2y^3 + 2y)$;

б) $x^8 - x^6 + x^2 = x^2(x^4 - x^3)$;

в) $a^9 + 6a^6 - a^3 = a^3(a^6 + 6a^3 - 1)$;

г) $b^2x^3 + cx^2 + x = x(b^2x^2 + cx)$.

173*. Відомо, що $a + b = 15$, а $x + y = m$. Знайдіть:

а) $3a + 3b$;

б) $\frac{1}{2}(a + b)$;

в) $0,8a + \frac{4}{5}b$;

г) $7,5x + 7\frac{1}{2}y$;

г) $0,25x + \frac{1}{4}y$;

д) $12x + 8 \cdot 1,5y$.

174*. Відомо, що $a + 5b$ ділиться на 9. Чи ділиться:

а) $7a + 35b$ на 9;

б) $15a + 75b$ на 3;

в) $2a + 10b$ на 6;

г) $4a + 20b$ на 18?

175. Розв'яжіть рівняння, розклавши ліву частину на множники:

а) $2x^2 - 3x = 0$;

б) $4x^2 + 10x = 0$;

в) $x^2 - 4,2x = 0$;

г) $5x^3 - 7,5x^2 = 0$;

г) $x^4 - 4x^2 = 0$;

д) $-x^2 + x = 0$.

Розв'язання. а) $x(2x - 3) = 0$.

Добуток двох множників x і $2x - 3$ дорівнює 0 лише тоді, коли один із них або обидва дорівнюють 0. Маємо: $x = 0$; $2x - 3 = 0$; $x = 3 : 2$; $x = 1,5$.

Відповідь. $x = 0$; $x = 1,5$.

176°. Винесіть за дужки спільний множник:

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| а) $2a(a - b) + (a - b)$; | б) $x(m + n) - y(m + n)$; |
| в) $m(a + 4) - n(a + 4)$; | г) $x(y - 1) - y(y - 1)$; |
| р) $a(7 - b) + (7 - b)$; | д) $(b + 5) - a(b + 5)$; |
| е) $6a(c - d) - 5b(c - d)$; | е) $(m + n) + b^3(m + n)$. |

177. Знайдіть значення виразу, спочатку розклавши його на множники:

- а) $x(a + 3) - y(a + 3)$, якщо $a = 4$, $x = \frac{3}{4}$; $y = \frac{1}{2}$;
- б) $m(n - 5) - n(n - 5)$, якщо $m = 6,8$, $n = -3,2$.

178*. Складіть двома способами вирази для обчислення площ зафарбованих фігур (рис. 13). Доведіть, що обидва вирази, одержані для кожної фігури, тотожні.

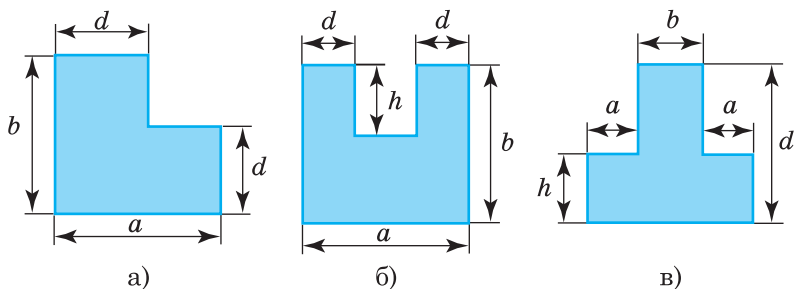


Рис. 13

179*. Для обчислень за допомогою калькулятора використовують тотожності:

$$ax^2 + bx + c = (ax + b)x + c \text{ та } ax^3 + bx^2 + cx + d = ((ax + b)x + c)x + d.$$

(Перевірте їх.)

Користуючись калькулятором, обчисліть значення виразів:

- а) $7,9x^2 + 28x - 29,5$, якщо $x = 8,26$;

б) $-12,75x^2 - 8,5x + 48,3$, якщо $x = 0,7$;

в) $7,8x^3 - 83,4x^2 + 7x + 28$, якщо $x = 14,5$;

г) $42,5x^3 + 0,28x^2 - 8,75x - 28,4$, якщо $x = 4,35$.

Розв'язання. а) $7,9x^2 + 28x - 29,5 = (7,9x + 28)x - 29,5$.

Якщо $x = 8,26$, то $(7,9 \cdot 8,26 + 28) \cdot 8,26 - 29,5$.

Обчислення на калькуляторі виконуємо в такій послідовності:

$$(7.9 \times 8.26 + 28) \times 8.26 - 29.5 = 740.7704.$$

Результат округлюємо до десятих: $\approx 740,8$.

2.4. Добуток многочленів.

Розкладання многочлена на множники способом групування

① **Добуток двох многочленів.** Перетворимо у многочлен вираз $(a + b)(c + d)$, що є добутком двох двочленів $a + b$ і $c + d$. Зробимо це, скориставшись відомим уже правилом перетворення у многочлен добутку одночлена і многочлена. Для цього позначимо двочлен $c + d$ буквою x :

$$c + d = x.$$

Тоді $(a + b)(c + d) = (a + b)x$.

Останній вираз перетворимо як добуток многочлена і одночлена. Маємо:

$$(a + b)x = ax + bx.$$

Підставимо у вираз, що дістали, замість x позначений ним двочлен $c + d$ і ще раз застосуємо правило перетворення добутку одночлена і многочлена у многочлен:

$$ax + bx = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Остаточно маємо:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Помічаємо, що утворений вираз є сумою добутків кожного члена першого двочлена і кожного члена другого двочлена.

Отже,



добуток двох многочленів дорівнює сумі добутків кожного члена першого многочлена і кожного члена другого.

Оскільки добуток це результат множення, а сума — додавання, то це твердження можна сформулювати й інакше:

щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого і додати знайдені добутки.

Приклад 1. Перетворити у многочлен добуток $(4a - 3b)(c + 5)$.

Розв'язання. $(4a - 3b)(c + 5) = 4a \cdot c + 4a \cdot 5 + (-3b) \cdot c + (-3b) \cdot 5 = 4ac + 20a - 3bc - 15b$.

Як правило, у таких перетвореннях відразу записують остаточний результат, не забуваючи враховувати знаки відповідних членів обох многочленів.

② Спосіб групування. У згорнутому вигляді послідовність розглянутого на початку пункту перетворення добутку двох дво-членів у многочлен можна записати так:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Відтворимо його у зворотному порядку, прочитавши справа наліво. Маємо:

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d).$$

У результаті многочлен $ac + ad + bc + bd$ розклали на множники $(a + b)$ і $(c + d)$.

Розглянемо спосіб, яким це було зроблено.

Помічаємо, що відомий спосіб винесення спільного множника за дужки не можна безпосередньо застосувати до даного многочлена, бо немає такого множника, який був би спільним для всіх його членів. Натомість є пари (групи) членів, які мають відповідні спільні множники: наприклад, для першого і другого членів це множник a , для третього і четвертого — множник b . Коли винесемо їх за дужки, то дістанемо вираз $a(c + d) + b(c + d)$. Його, у свою чергу, можна перетворити шляхом винесення за дужки нового спільного множника $(c + d)$:

$$a(c + d) + b(c + d) = (c + d)(a + b).$$

Такий спосіб розкладання многочлена на множники називають **способом групування**.

Розкладаючи розглянутий многочлен на множники цим способом, його члени можна було згрупувати й інакше: перший — з третім, другий — з четвертим:

$$\begin{aligned} ac + ad + bc + bd &= (ac + bc) + (ad + bd) = \\ &= c(a + b) + d(a + b) = (a + b)(c + d). \end{aligned}$$

Дістали той самий результат.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен $ax + by - bx - ay$.

Розв'язання. Згрупуємо члени многочлена за ознакою наявності спільного множника у членів однієї групи. Це можуть бути групи, утворені першим і четвертим членами (спільний множник a) та другим і третім членами (спільний множник b). Можливий і інший варіант групування: перший і третій члени (спільний множник x) та другий і четвертий члени (спільний множник y). Розглянемо кожний з варіантів окремо.

Варіант 1

$$ax + by - bx - ay = (ax - ay) + (by - bx) = a(x - y) + b(y - x).$$

Бачимо, що вирази в дужках відрізняються лише знаками. Щоб їх зробити однаковими, слід змінити знаки членів одного з цих виразів (наприклад, у других дужках) на протилежні. А для цього, як відомо, достатньо змінити знак перед дужками на протилежний. Зробимо це:

$$a(x - y) + b(y - x) = a(x - y) - b(x - y).$$

Подальші перетворення не викликають труднощів:

$$a(x - y) - b(x - y) = (x - y)(a - b).$$

У процесі групування можна було відразу перед другими дужками поставити знак «мінус». Тоді перетворення мало б такий вигляд:

$$\begin{aligned} ax + by - bx - ay &= (ax - ay) - (bx - by) = \\ &= a(x - y) - b(x - y) = (x - y)(a - b). \end{aligned}$$

Варіант 2

$$\begin{aligned} ax + by - bx - ay &= (ax - bx) + (by - ay) = x(a - b) + y(b - a) = \\ &= x(a - b) - y(a - b) = (a - b)(x - y). \end{aligned}$$

Отже, щоб розкласти многочлен на множники способом групування, потрібно:

1) знайти і об'єднати в групи (згрупувати) члени многочлена, що мають спільний множник;

2) у кожній групі винести за дужки спільний множник;

3) якщо вираз у всіх дужках виявиться однаковим, винести його за дужки; якщо ні — спробувати тотожно перетворити його або згрупувати члени многочлена інакше.



Запитання для самоперевірки

1. Як перетворити у многочлен добуток двох многочленів? Проілюструйте прикладом.
2. Поясніть суть перетворення, яке називається розкладанням многочлена на множники способом групування.



Задачі та вправи

Запишіть у вигляді многочленів вирази (180–183):

180°. а) $(a - b)(m - n)$; б) $(2 - a)(3 - b)$; в) $(x + y)(a + b)$;
г) $(x - y)(a - b)$; і) $(a - b)(4 - x)$; д) $(a - b)(5 - x)$.

181°. а) $(a^2 + b)(c^2 + d)$; б) $(a^2 - b^2)(-c^2 + d)$;
в) $(2x + y)(x + 3y)$; г) $(0,5a - b^2)(a - b^3)$;
і) $(3ab - 4,5b^2)(5a^2b + 2ab)$; д) $(m^2 - 4n^3)(m^4 + 5n^2)$.

182°. а) $(2a - b)(3a + 4b)$; б) $(2x - 1)(x - 2)$;
в) $(5m - 4n)(3m + n)$; г) $(4ab - a)(b - 1)$;
і) $(5x + 2x^2)(x^2 - 3x)$; д) $(n^2 + n)(n^3 - n^2)$.

183°. а) $(a + b)(a + b)$; б) $(a - b)(a + b)$;
в) $(a - b)(a - b)$; г) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
і) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$; д) $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$.

Чи тотожні вирази (184–185):

184°. а) $(a + b)(a + b)$ і $a^2 + 2ab + b^2$;
б) $(a - b)(a - b)$ і $a^2 - 2ab + b^2$;
в) $(a + b)(a - b)$ і $a^2 - b^2$;
г) $(a + b)(a + b)$ і $a^2 + b^2$?

185. а) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ і $a^3 + b^3$;
 б) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ і $a^3 - b^3$;
 в) $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$ і $a^3 + b^3$?

186. Розгляньте площу S кожного із прямокутників $ABCD$, зображених на рисунку 14, a і b , та поясніть, що:
 а) $(a + b)(c + d + p) = ac + ad + ap + bc + bd + bp$;
 б) $(a + b + c)(d + e + p) = (ad + ae + ap) + (bd + be + bp) + (cd + ce + cp)$.

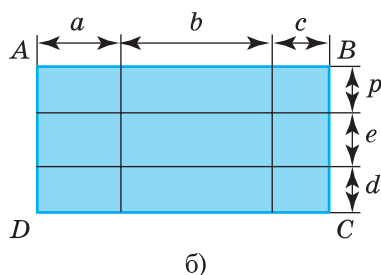
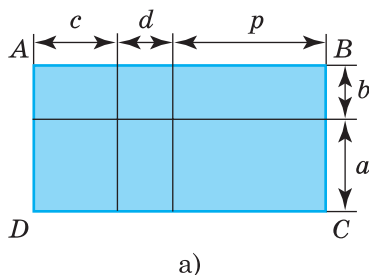


Рис. 14

Перетворіть у многочлени (187–189):

- 187°. а) $(x - 2)(x + 4) + x(x + 5)$;
 б) $(3a - 1)(a - 2) + 2a(a - 3)$;
 в) $(3m - n)(2m + 4n) + 5m(m + 3n)$;
 г) $(c + d)(d - c) + 3c(c - 2d)$.
- 188°. а) $6a + (a - 6)(a + 2)$;
 б) $2p(m - p) + (2m + 1)(p - 2)$;
 в) $(x + 2)(x + 3) + (4 - x)(x - 1)$;
 г) $(2a - b)(b - 3a) + (a - b)(a + 3b)$.
189. а) $(x - 3y)(x + 5) - 2x(x + y)$;
 б) $(5a - 2)(1 - 3a) - a(4a + 2)$;
 в) $(6c - 8)(5 - 2c) - 3c(c - 1)$;
 г) $(n + 3m)(3m - n) - 2n(n - m)$;
 ґ) $(b + 2a)(4a - 3b) - 2a(5a - b)$;
 д) $(2x + 5y)(y + 3x) - 2x(3x + 8y)$.

190. Щоб знайти площу S прямокутника $ABCD$ (рис. 15), семикласники розв'язали задачу трьома способами:

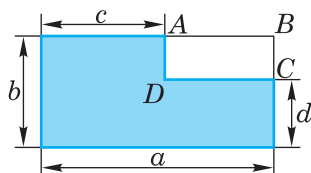


Рис. 15

- 1) $S = (a - c)(b - d)$;
- 2) $S = ab - ad - (b - d)c$;
- 3) $S = ab - bc - (a - c)d$.

Поясніть, як вони міркували. Доведіть, що одержані вирази тотожні.

Спростіть вирази (191–192):

191. а) $3a^2 - (2a - 1)(a + 4)$.

УВАГА! Для уникнення помилок зі знаками, що можуть трапитися при спрощенні подібних виразів, перетворення доцільно виконувати у такій послідовності:

$$\begin{aligned} 3a^2 - (2a - 1)(a + 4) &= 3a^2 - (2a^2 + 8a - a - 4) = \\ &= 3a^2 - 2a^2 - 8a + a + 4 = a^2 - 7a + 4. \end{aligned}$$

- б) $4b^2 - (a - 2b)(a + 2b)$;
- в) $2mn - (m - n)(2m + n)$;
- г) $4x(x + y) - (x - y)(2x - 3y)$;
- ґ) $c(c - 5d) - (c - 3d)(2d - 4c)$;
- д) $(c - d)(c + d) - (c - d)(c - d)$.

192. а) $6x^2 - (3x + 2)(2x - 3)$;
- б) $5a(2x - a) - (3a - x)(2x - a)$;
- в) $(m + 4)(m - 2) + (2 - 3m)(m + 1)$;
- г) $(c - 2)(3c + 1) - (3 - c)(c + 5)$.

Обчисліть значення виразів (193–194):

193. а) $(x - y)(x + y) + y^2$, якщо $x = 0,9$;
- б) $(x - y)(x - y) - (x^2 + y^2)$, якщо $x = 0,8$ і $y = 1,2$;
- в) $4ab(4a^2 - b) - 3ab(4a^2 - b)$, якщо $a = -1$ і $b = 0,2$;
- г) $(a - 4)(a - 2) - (a - 1)(a - 3)$, якщо $a = 1\frac{3}{4}$;
194. а) $(a - 4)(a - 2) - (a - 2)(a - 3)$, якщо $a = 0,8$;
- б) $(a - 5)(a - 1) - (a + 2)(a - 3)$, якщо $a = -2,6$;
- в) $b^4 - (b^2 - 2)(2 + b^2)$, якщо $b = -0,368$.

195*. Доведіть, що значення виразів при довільних значеннях x є сталими числами:

а) $(4 - x)(4 + x) + x^2$; б) $(x - 5)(x + 6) - x(x + 1)$;
в) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) - x^3$; г) $(5 + x)(25 - 5x + x^2) - x^3$.

196. Обчисліть зручним способом:

а) $2,7 \cdot 6,2 - 9,3 \cdot 1,2 + 6,2 \cdot 9,3 - 1,2 \cdot 2,7$;
б) $1,25 \cdot 14,9 + 0,75 \cdot 1,1 + 14,9 \cdot 0,75 + 1,1 \cdot 1,25$.

197. Розв'яжіть рівняння:

а°) $(x - 1)(x - 3) - x^2 = 0$;
б) $(x - 0,8)(x - 1,2) - x^2 = -0,4$;
в*) $6x^2 - (2x - 3)(3x + 2) = 2$;
г*) $(10x + 9)x - (5x - 1)(2x + 3) = 8$;
г*) $(3x - 2)(x + 4) - (3x + 9)(x - 1) = 0$;
д*) $12 - y(y - 3) - (6 - y)(y + 2) = 0$.

Запишіть вирази у вигляді добутку (198–200):

198. а) $3a(a - b) + 2b(a - b)$; б) $5(m - 2) - m(m - 2)$;
в) $6m(p - 3) + 5n(p - 3)$; г) $7q(p - q) - 2(p - q)$;
г) $2c(x + y) + (x + y)$; д) $d(a + b) - (a + b)$.

Вказівка. Для попередження можливих помилок розв'язання подібних вправ доцільно, принаймні на перших порах, здійснювати у такій послідовності:

г) $2c(x + y) + (x + y) = 2c(x + y) + 1 \cdot (x + y) = (x + y)(2c + 1)$.

199. а) $3m + n - x(3m + n)$; б) $(a - b) - 2c(a - b)$;
в) $a(b - 5) + 2(5 - b)$; г) $2y(5 - a) + 5 - a$;
г) $6(x - 3) - x(3 - x)$; д) $3a(1 - a) - 4(a - 1)$.

Вказівка. в) $a(b - 5) + 2(5 - b) = a(b - 5) - 2(b - 5) = (b - 5)(a - 2)$.

200. а) $5(c + d) + b(-c - d)$; б) $2x(3 + y) - y(y + 3)$;
в) $2c(c - 4) - 4 + c$; г) $3(a - b) + (a - b)^2$;
г) $m(n - 3) - n + 3$; д) $2 - a - 5(a - 2)$;
е) $(x - 3)^2 - 2(x - 3)$; е) $(a - 4)^2 + 4 - a$.

Розкладіть вирази на множники (201–203):

201°. а) $ab + ad + c(b + d)$; б) $m(x - y) + nx - ny$;
в) $ab - bc - d(a - c)$; г) $ax + bx + ay + by$;
г) $ab - ad + bc - dc$; д) $am + bm - ak - bk$.

202. а) $ac - bc - ad + bd$; б) $a^2c^2 + a^2d^2 + bc^2 + bd^2$;
 в) $3x - xy + 3y - y^2$; г) $2m^2 + n + m + 2mn$;
 р) $2m^2 - 2mn - m + n$; д) $3ax - 2a^2 - 2a + 3$.
 203. а) $a^5 - a^3 - a^2 + 1$; б) $x^4 - x + 3x^3 - 3$;
 в) $a^6 - 3a^4 - 2a^2 + 6$; г) $y^3 + 1 + y^2 + y$;
 р) $y^2 + 7x - xy - 7y$; д) $x^6 + 6 - 3x^4 - 2x^2$.

204. Доведіть тотожності:

- а) $x^2 - xy + 2x - 2y = (x - y)(x + 2)$;
 б) $a^2 - ab - 3a + 3b = (a - 3)(a - b)$;
 в) $a^2 + ab - 3a + 3b = (a - 3)(a + b)$;
 г) $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$.

205*. Обчисліть значення виразів, спочатку розклавши їх на множники:

- а) $131 \cdot 25 + 17 \cdot 131 + 19 \cdot 69 + 69 \cdot 23$;
 б) $4a^3 - 12a^2 - a + 3$, якщо $a = 0,5$;
 в) $y^2 + 3xy - 6x - 2y$, якщо $x = 0,15$, $y = 0,55$;
 г) $5mn - n^2 - n + 5m$, якщо $m = 1,2$, $n = 6$;
 р) $a^2 + 4a^3 + 4a + 1$, якщо $a = 0,5$;
 д) $ab^2 - 4b - a^2b + 4a$, якщо $a = 1,5$, $b = 2,5$.

206*. Розкладіть на множники:

- а) $(ab)^n(bc)^k - (ab)^3(bc)^2$, де n і k — натуральні числа;
 б) $a^{3n}b^{2n} + a^{2n}b^{3n}$, де n — натуральне число.

207. Розв'яжіть рівняння:

- а) $x(x - 3) + (x - 3) = 0$; б) $x(x - 3) + 4x - 12 = 0$;
 в) $x^2 - 4x + x - 4 = 0$; г) $x^2 + 4x + x + 4 = 4$;
 р) $x^3 - 1 + x - x^2 = 0$; д) $3y^3 + 2 + 2y^2 + 3y = 0$.

208*. Із прямокутного листа жерсті зі сторонами a дм і b дм вирізали по кутах однакові квадрати зі стороною h дм. З фігури, що утворилася, виготовили ящик. Запишіть вираз для обчислення площі поверхні та об'єму ящика (рис. 16).

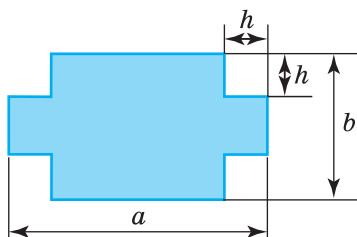


Рис. 16

- 209.** Якщо одну сторону квадрата збільшити на 8 м, а другу — зменшити на 5 м, то площа одержаного прямокутника буде на 4 м^2 меншою від площі квадрата. Обчисліть площу квадрата.
- 210.** Якщо одну сторону квадрата зменшити на 22 м, а другу — збільшити на 68 м, то площа одержаного прямокутника стане меншою від площі квадрата на 24 м^2 . Обчисліть площу квадрата.
- 211.** Якщо одну сторону прямокутника збільшити на 2 дм, а іншу — зменшити на 0,5 м, то дістанемо квадрат, площа якого на 50 дм^2 менша від площі прямокутника. Обчисліть площу квадрата.
- 212.** Якщо основу прямокутника зменшити на 4 см, а бічну сторону збільшити на 0,5 дм, до дістанемо квадрат, площа якого на 40 см^2 більша за площу прямокутника. Обчисліть площу прямокутника.
- 213.** Периметр прямокутника дорівнює 36 м. Якщо одну його сторону збільшити на 1 м, а іншу — на 2 м, то площа фігури збільшиться на 30 м^2 . Обчисліть площу даного прямокутника.
- 214*.** Маємо чотири послідовні цілі числа. Доведіть, що добуток середніх чисел більший за добуток крайніх на 2.
- 215*.** Маємо чотири послідовні парні числа. Доведіть, що добуток середніх чисел більший за добуток крайніх на 8.
- 216*.** Маємо чотири послідовні непарні числа. Доведіть, що добуток середніх чисел більший за добуток крайніх на 8.
- 217*.** Запишіть вирази у вигляді добутку двочлена і тричлена:
- $m^2 + m^3n + m^2n - mn^3 - n^3 - n^2$;
 - $x^2y^4 - y^4x + y^4 - x^2z^3 + xz^3 - z^3$;
 - $m^2n^2 - n^3 + 3n^2 - m^2 + n - 3$;
 - $b^2p^2 - b^2g^4 + b^2n^3 - c^2p^2 + c^2g^4 - c^2n^3$.
- 218*.** Розкладіть на множники:
- $2a^2 - 10ac + 3ab - 15bc + a - 5c$;
 - $16xy^2 - 10z^3 + 32xz^2 - 5y^2z$;
 - $y^{n-3} + y^{n-2} + y^n + y^{n+1}$;
 - $x^n + 2x^{n-2} + x^{n-4} + x^{n+1}$.

2.5. Різниця квадратів

① **Добуток суми і різниці двох виразів.** Запишемо добуток суми виразів a і b та їх різниці і перетворимо його у многочлен. Маємо:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отже,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2. \quad (1)$$



Добуток суми двох виразів і їх різниці дорівнює різниці квадратів цих виразів.

На основі цієї тотожності значно спрощуються перетворення аналогічних добутків. Наприклад:

$$1) (x + 4)(x - 4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16;$$

$$2) (2a - b)(2a + b) = (2a)^2 - b^2 = 4a^2 - b^2;$$

$$3) (3m + 2n)(2n - 3m).$$

У цьому випадку для застосування встановленої тотожності достатньо переставити доданки у перших дужках:

$$\begin{aligned} (3m + 2n)(2n - 3m) &= (2n + 3m)(2n - 3m) = \\ &= (2n)^2 - (3m)^2 = 4n^2 - 9m^2. \end{aligned}$$

Встановлену тотожність можна використати також для спрощення обчислень. Наприклад:

$$102 \cdot 98 = (100 + 2)(100 - 2) = 100^2 - 2^2 = 10\,000 - 4 = 9996.$$

② **Як розкласти на множники різницю квадратів.** Якщо поміняти місцями ліву і праву частини тотожності (1), дістанемо:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b). \quad (2)$$

Тобто



різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і їх різниці.

Тотожність (2) використовують для розкладання многочленів на множники. Наприклад:

1) $m^2 - (2n)^2$. Цей вираз є різницею квадратів одночленів m і $2n$, тому маємо: $m^2 - (2n)^2 = (m + 2n)(m - 2n)$.

2) $(a - b)^2 - a^2$. Це різниця квадратів виразів $a - b$ і a , тому $(a - b)^2 - a^2 = (a - b + a)(a - b - a) = (2a - b)(-b) = b(b - 2a)$.

3) $x^4 - 36$.

Якщо у попередніх двох прикладах вирази були записані у вигляді різниці квадратів, то останній вираз спочатку потрібно звести до такого вигляду. Оскільки $x^4 = (x^2)^2$ і $36 = 6^2$, то $x^4 - 36 = (x^2)^2 - 6^2 = (x^2 - 6)(x^2 + 6)$.

4) $9m^2 - 25n^2 = (3m)^2 - (5n)^2 = (3m - 5n)(3m + 5n)$.



Запитання для самоперевірки

1. Які з рівностей правильні:

а) $(a - 2)(a + 2) = a^2 - 4$;

б) $(3 + b)(b - 3) = 9 - b^2$;

в) $(m - n)(-m - n) = n^2 - m^2$;

г) $(-x - y)(y - x) = x^2 - y^2$?

2. Наведіть приклади виразів, які:

а) є різницею квадратів двох виразів;

б) можна подати у вигляді різниці квадратів двох виразів.



Задачі та вправи

219°. Запишіть вирази у вигляді многочленів:

а) $(a - x)(a + x)$;

б) $(m + x)(m - x)$;

в) $(2 - x)(2 + x)$;

г) $(x + 4)(x - 4)$;

г) $(p - k)(p + k)$;

д) $(6 + b)(6 - b)$;

е) $(c - d)(d + c)$;

е) $(p + b)(b - p)$;

ж) $(x - 4)(x + 4)$;

з) $(x + 5)(x - 5)$.

220°. Запишіть двочлени у вигляді добутку:

а) $a^2 - x^2$;

б) $m^2 - n^2$;

в) $9 - x^2$;

г) $a^2 - 16$;

г) $p^2 - m^2$;

д) $c^2 - k^2$;

е) $(2x)^2 - b^2$;

е) $9x^2 - b^2$;

ж) $4x^2 - 9y^2$;

з) $36a^2 - y^2$;

и) $25a^2 - 16b^2$;

і) $81x^2 - 64y^2$.

Обчисліть (221–222):

221°. а) $85^2 - 15^2$; б) $89^2 - 11^2$; в) $75^2 - 25^2$;
г) $78^2 - 12^2$; ґ) $99,1^2 - 0,9^2$; д) $27^2 - 13^2$.

222. а) $\left(8\frac{4}{5}\right)^2 - \left(1\frac{1}{5}\right)^2$; б) $\left(9\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$;
в) $0,25^2 - \left(1\frac{3}{4}\right)^2$; г) $\left(2\frac{1}{5}\right)^2 - (-0,2)^2$.

223°. Спростіть:

а) $(m+n)(m-n)$; б) $(a+2)(a-2)$; в) $(x-5y)(x+5y)$;
г) $(4b-3)(4b+3)$; ґ) $(2x-3y)(2x+3y)$; д) $(3y^2+a)(3y^2-a)$.

224*. Доведіть, що значення виразу $(y+3)(y-3)+10$ додатне за будь-яких значень y . Знайдіть найменше значення, якого може набувати цей вираз.

225. Перетворіть у многочлени вирази:

а) $(a-b)(b+a)$; б) $(2c+d)(d-2c)$; в) $(a-3)(3+a)$;
г) $(4x+7y)(7y-4x)$; ґ) $(m^2-n)(n+m^2)$; д) $(p-s)(-p-s)$;
е) $(5m-n)(n+5m)$; е) $(a^3+b^2)(b^2-a^3)$; ж) $(3x^2+y^3)(y^3-3x^2)$.

Розкладіть вирази на множники (226–227):

226°. а) $p^2 - k^2$; б) $49 - b^2$; в) $36a^2 - y^2$;
г) $25a^2 - 16b^2$; ґ) $81x^2 - 64y^2$; д) $0,64a^2 - 0,49b^2$.

227. а) $1,44a^2 - 2\frac{1}{4}b^2$; б) $1\frac{11}{25}x^4 - 1\frac{7}{9}y^2$; в) $1,69x^2 - 2,25y^2$;
г) $\left(\frac{a}{2} - 3\right)^2 - \frac{a^2}{4}$; ґ) $\left(2 - \frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x^2}{y^2}$; д) $(x - 0,5)^2 - 0,25$.

Обчисліть (228–229):

228°. а) $98 \cdot 102$; б) $97 \cdot 103$; в) $998 \cdot 1002$;
г) $57 \cdot 63$; ґ) $73 \cdot 87$; д) $997 \cdot 1003$.

229. а) $99,7 \cdot 100,3$; б) $98,8 \cdot 101,2$; в) $97,4 \cdot 106,6$;
г) $45\frac{1}{5} \cdot 14,8$; ґ) $39\frac{2}{3} \cdot 40\frac{1}{3}$; д) $27,6 \cdot 72\frac{3}{5}$.

230*. Доведіть, що:

а) $156^2 - 144^2$ ділиться на 300;
б) $736^2 - 264^2$ ділиться на 8000.

Спростіть вирази (231–232):

- 231.** а) $(2x - y^2)(2x + y^2) - y^4$; б) $(8xy - 9y)(8xy + 9y) + 81y^2$;
в) $(12x - y^3)(12x + y^3) - 144x^2$; г) $(0,6x^2 - y)(0,6x^2 + y) + y^2$.
- 232.** а) $(1,3x^2 - y)(1,3x^2 + y) - 1,69x^4$; б) $\frac{4}{9}b^2 + \left(a^2 + \frac{2}{3}b\right)\left(a^2 - \frac{2}{3}b\right)$;
в) $(x - 4)(x + 4)(x^2 + 16)$; г) $(25x^2 + 9)(5x - 3)(5x + 3)$;
г) $(0,25x^2 + 0,16)(0,5x - 0,4)(0,4 + 0,5x)$.
- 233.** Доведіть, що значення виразів не залежать від значення змінної x :
а) $(7 - x)(7 + x) + x^2$;
б) $0,7 + x^2 - (x + 0,5)(x - 0,5)$;
в) $(x + 3)(x - 3) - x(x - 3) - 3x$;
г) $-x(x + 64) + 64x + (8 + x)(x - 8)$.
- 234*.** Якщо кожну з двох протилежних сторін квадрата збільшити на 3 см, а кожну з двох інших — зменшити на 3 см, то дістанемо прямокутник. Площа якої фігури більша? На скільки?
- 235*.** Як зміниться площа квадрата, якщо одну його сторону збільшити на 4 см, а другу, суміжну з нею, зменшити на стільки ж?
- 236.** Знайдіть помилки, виправте їх і поясніть, чому так трапилося:
а) $x^2 - 64 = (x - 8)(x + 8)$;
б) $2x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$;
в) $x^2 - 0,25 = (x - 0,5)(x + 0,5)$;
г) $x^2 + 49 = (x + 7)(x - 7)$;
г) $x^2 - 0,64 = (x - 0,8)(x - 0,8)$;
д) $(xy^2 - 4x)(xy^2 + 4x) = x^2y^4 - 4x^2$.
- 237.** Розв'яжіть рівняння:
а) $(x - 4)(x + 4) = 0$; б) $x^2 - 25 = 0$; в) $36 - x^2 = 0$;
г) $1,44 - x^2 = 0$; г) $\frac{4}{9} - x^2 = 0$; д) $\frac{25}{36} - x^2 = 0$.
- 238*.** Заповніть пропущені місця відповідними одночленами так, щоб утворилися тотожності:
а) $(4a + \dots)(\dots - 7b) = 16a^2 - 49b^2$;
б) $(\dots + 5b)(\dots - 5b) = 49x^2 - \dots$;
в) $(2x - \dots)(\dots + \dots) = 4x^2 - 0,64y^2$;

$$\text{г) } (0,4x - \dots)(0,4x + \dots) = \dots - \frac{4}{9}y^2;$$

$$\text{г) } \left(\dots + \frac{1}{2}y \right) (x - \dots) = x^2 - \frac{1}{4}y^2.$$

239*. Розв'яжіть рівняння:

$$\text{а) } (x - 7)(x + 7) = x^2 + 2x;$$

$$\text{б) } 2y - y^2 = (3 - y)(3 + y);$$

$$\text{в) } (12 - x)(12 + x) = 4x - x^2;$$

$$\text{г) } (14 + x)(14 - x) = 7x - x^2.$$

2.6. Квадрат двочлена

① **Добуток двох однакових двочленів.** Знайдемо добуток двох однакових двочленів $(a + b)(a + b)$. За правилом множення многочленів маємо:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

З іншого боку, $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$.

Отже,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (3)$$



Квадрат двочлена дорівнює сумі трьох виразів: квадрата першого члена, подвоєного добутку першого і другого членів та квадрата другого члена.

Формулу (3) можна проілюструвати, розглянувши площу квадрата, зображеного на рисунку 17.

Розглянемо, якого вигляду набуває формула (3), якщо перед одним із членів двочлена поставити знак «-»:

$$1) (a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$2) (-a + b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

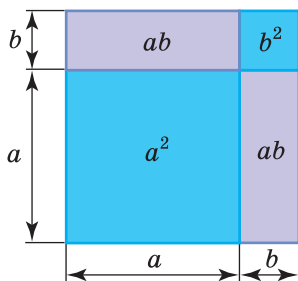


Рис. 17

Оскільки $-a + b = b - a$, то

$$(a - b)^2 = (b - a)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad (3')$$

Цю формулу читають так:



квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого і другого виразів плюс квадрат другого виразу.

УВАГА! Застосовуючи розглянуті тотожності, не забувайте, що під a і b розуміють будь-які числа або одночлени.

Нехай потрібно обчислити 101^2 . Запишемо число 101 як $(100 + 1)$. Тоді маємо:

$$101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201.$$

Аналогічно:

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9801.$$

Якщо потрібно записати, наприклад, вираз $(2x + 3)^2$ у вигляді многочлена, то за формулою (3) маємо:

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9.$$

Перетворюючи вираз $(4a - 5b)^2$, зручніше відразу скористатися формулою (3'):

$$(4a - 5b)^2 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 5b + (5b)^2 = 16a^2 - 40ab + 25b^2.$$

Вираз $(4a - 5b)^2$ можна перетворити і за формулою (3), враховуючи, що членами даного двочлена є вирази $4a$ і $-5b$.

② **Запис тричлена у вигляді квадрата двочлена.** Часто доводиться виконувати обернене перетворення, записуючи даний тричлен у вигляді квадрата двочлена. Це перетворення ґрунтується на тотожностях, які можна дістати з формул (3) і (3'), помінявши місцями їхні ліві і праві частини. Маємо:

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2; \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2, \\ \text{або } a^2 - 2ab + b^2 &= (b - a)^2. \end{aligned}$$

Приклад. Записати вираз $a^2 - 6a + 9$ у вигляді квадрата двочлена.

Розв'язання. Спочатку спробуємо знайти члени тричлена, які можуть бути записані у вигляді квадратів відповідних одночленів. Очевидно, це a^2 і 9. Вони є квадратами одночленів a і 3.

А тепер з'ясуємо, з якими знаками слід узяти ці одночлени. Для цього дивимосся на знак подвоєного добутку у даному тричлені: $-6a$. Бачимо, що подвоєний добуток має знак «-». Це означає, що члени одночлена мають різні знаки.

Отже,

$$a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2, \text{ або } a^2 - 6a + 9 = (3 - a)^2.$$

Оскільки $(a - 3)^2 = (3 - a)^2$, то обмежуються, як правило, першим записом.



Запитання для самоперевірки

- Які з рівностей є тотожностями:
а) $(m + n)^2 = (n + m)^2$; б) $(a - b)^2 = (b - a)^2$;
в) $(b - a)^2 = -(a - b)^2$; г) $(-a - b)^2 = -(a + b)^2$;
г) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$; д) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$?
- Чи може квадрат суми двох виразів дорівнювати квадрату їх різниці? Відповідь поясніть.



Задачі та вправи

240°. Запишіть вирази у вигляді многочленів:

- $(m + x)^2, (x + d)^2, (c - y)^2$;
- $(n - y)^2, (2 - y)^2, (x - 5)^2$;
- $(0,5 - x)^2, (x - 0,4)^2, \left(\frac{3}{4} - x\right)^2$;
- $(0,1 - x)^2, (-x + 0,1)^2, (-x - 0,1)^2$;
- $(x^2 + x)^2, (x^2 - x)^2, (-x^2 - x)^2$;
- $(x^3 + 1)^2, (-x^2 + 1)^2, (-x^3 - 1)^2$;
- $(x^2 + x^3)^2, (x^3 - x^2)^2, (-x^3 - x^2)^2$;
- $(4x + 3x^2)^2, (3x^2 - 4x)^2, (-3x - 4x^2)^2$;
- $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{7}x\right)^2, (25 - x)^2, (40 - 25x)^2$.

241°. Обчисліть, скориставшись формулою квадрата двочлена:

- а) 102^2 ; б) 103^2 ; в) 97^2 ; г) 1002^2 ;
р) 998^2 ; д) $99,6^2$; е) $1000,4^2$; є) $999,7^2$.

Запишіть вирази у вигляді квадрата двочлена (242–243):

242°. а) $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - 2xy + y^2$;

б) $m^2 - 2xm + x^2$, $m^2 + 2mx + x^2$;

в) $4 - 4y + y^2$, $y^2 + 4y + 4$;

г) $0,16 + 0,8x + x^2$, $x^2 - 0,8x + 0,16$.

243. а) $x^6 + 2x^3 + 1$, $x^6 - 2x^3 + 1$;

б) $x^4 + 2x^5 + x^6$, $x^4 - 2x^2 + 1$;

в) $x^2 + 16x + 64$, $x^2 - 20x + 100$;

г) $144 + 24x + x^2$, $121 - 22x + x^2$;

р) $625 + 50x^2 + x^4$, $1600 + 2000x + 625x^2$.

244. Обчисліть:

а°) $37^2 + 2 \cdot 3 \cdot 37 + 3^2$;

б°) $38,3^2 - 2 \cdot 38,3 \cdot 8,3 + 8,3^2$;

в) $82,7^2 + 12,7^2 - 2 \cdot 82,7 \cdot 12,7$;

г) $71^2 + 29^2 + 71 \cdot 58$;

р) $198^2 + 2^2 + 4 \cdot 198$;

д) $458^2 + 58^2 - 116 \cdot 458$.

245*. Знайдіть помилки і виправте їх:

а) $(a^n + 1)^2 = a^{2n} + 2a^n + 1$;

б) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$;

в) $(2^n + 3^n)^2 = 4^n + 6^n + 9^n$;

г) $(4 + x)(3 - 3x) = 12 - 9x - 3x^2$;

р) $(x - y)^2 = x^2 - y^2$;

д) $(2a + 3b)(4x + 4y) = 8ax + 12by$.

246*. Замініть зірочки одночленами, щоб утворилися тотожності:

а) $(* + y)^2 = * + 2ay + y^2$;

б) $(4x - *)^2 = * - * + y^2$;

в) $(x - *)^2 = * - 6x + *$;

г) $* + 24a + * = (4a + *)^2$;

р) $(2x^3 + *)^2 = * + 20x^3y^4 + *$.

247*. Заповніть пропущені місця відповідними одночленами так, щоб утворилися тотожності:

а) $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(\dots + \dots)^2$;

б) $(2a + \dots)^2 = \dots + \dots + 9b^2$;

в) $2(\dots + \dots)^2 = 2y^2 + 2y + 0,5$;

г) $2(\dots - 3b)^2 = 2a^2 - \dots + \dots$.

248. Доведіть тотожності:

а) $(m - n)^2 = (n - m)^2$;

б) $(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$;

в) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$;

г) $(c - d)^2 = (c + d)^2 - 4cd$;

ґ) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;

д) $(a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$;

е) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Спростіть вирази (249–250):

249°. а) $(x - y)^2 + (x + y)^2$;

б) $(x + y)^2 - (x - y)^2$;

в) $(a - b)^2 - (a + b)(a - b)$;

г) $(2a - 3b)^2 - (2a + 3b)^2$.

250. а) $24a^2 - (7a - 2)^2 + (5a - 3)(5a + 3)$;

б) $5(3a - 2)^2 - 5(3a - 4)(3a + 4)$.

251*. Різниця квадратів двох послідовних цілих додатних чисел дорівнює 11. Знайдіть ці числа.

252*. Різниця квадратів двох послідовних парних додатних чисел дорівнює 28. Знайдіть ці числа.

253*. Різниця квадратів двох послідовних непарних додатних чисел дорівнює 32. Знайдіть ці числа.

254. Знайдіть числові значення виразів:

а) $(x - 0,4)^2 - x(x + 1,8)$, якщо $x = 0,4$;

б) $(x - 1,2)^2 - y(y + 2x) + (y + x)^2$, якщо $x = 3,2$;

в) $(x + y)^2 + (x - y)(x + y) + (x - y)^2$, якщо $x = 3, y = 2$;

г) $(3x - 5)^2 - (3x + 5)(3x - 5)$, якщо $x = 0,1$.

255. Доведіть, що значення виразів не залежать від значення змінної x :

а) $(5 + x)^2 + (5 - x)^2 - 2x^2$;

б) $(6 + x)^2 + (6 - x)(6 + x) - 12x$;

в) $x^2 - 6x - (3 - x)^2$;

г) $(x - y)^2 - (x + y)^2 + 4xy$;

ґ) $(x + 1)^2 + 3(x - 1)^2 - 4x(x - 1)$;

д) $0,8ax - (0,4a + x)^2 - (0,2a - x)(0,2a + x)$.

256*. Доведіть, що за довільного цілого значення x значення виразу $(6x + 5)^2 - (4x + 5)^2$ ділиться на 40.

Розв'яжіть рівняння (257–258):

257. а) $(x - 7)^2 = x^2$; б) $(x + 4)^2 = (x - 5)^2$;

в) $(x - 8)^2 = x^2 - 8$; г) $(x - 9)^2 = x^2 + 81$;

р) $(x - 12)^2 - x(x - 11) = 1$; д) $x^2 - 8x + 16 = 0$.

258. а) $x^2 - 10x + 25 = 0$; б) $x^2 + 49 = 14x$;

в) $(6x - 1)^2 - 4(3x + 2)(3x - 2) = -7$.

Доведіть, що за будь-яких значень x дані вирази набувають тільки додатних значень (259–260):

259. а) $x^2 + 5$; б) $(x + 3)^2 + 1$;

в) $(x - 7)^2 + 2$; г) $4 + (x - 4)^2$.

260*. а) $x^2 + 6x + 10$; б) $x^2 - 10x + 30$.

261. Розкладіть на множники:

а) $(x^2 - 4xy + 4y^2) - 4$; б) $(a^2 - 6a + 9) - b^2$;

в) $4m^2 - 4mn + n^2 - 1$; г) $b^2 + 10b + 25 - 4c^2$;

р) $1 - b^2 + 4ab - 4a^2$; д) $9x^2 - y^2 + 10y - 25$.

262*. Доведіть, що $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

263*. Розкрийте дужки:

а) $(y + x + c)^2$; б) $(x + y - c)^2$; в) $(x - y - 1)^2$;

г) $(x - y - c)^2$; р) $(x - 2 - y)^2$; д) $(2x + y + 3c)^2$.

2.7. Сума і різниця кубів

① **Сума кубів.** Тотожності (1), (3) і (3') дають можливість істотно спростити перетворення відповідних добутків і відразу записати потрібний результат. Тому їх називають **формулами** або **тотожностями скороченого множення**. Розглянемо ще дві формули.

Знайдемо добуток двочлена $a + b$ і тричлена $a^2 - ab + b^2$:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Отже,

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3. \quad (4)$$

Проаналізуємо виведену формулу. Ліва її частина є добутком суми виразів a і b та тричлена $a^2 - ab + b^2$, який називають **неповним квадратом різниці** виразів a і b .

Цю назву легко пояснити, порівнявши вираз з так званим повним квадратом різниці виразів a і b :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Відмінність між ними полягає у відсутності двійки перед добутком ab . Аналогічно тричлен $a^2 + ab + b^2$ називають **неповним квадратом суми** виразів a і b .

Праворуч у формулі (4) маємо суму кубів виразів a і b . Тому цю формулу читають так:



добуток суми двох виразів і неповного квадрата їх різниці дорівнює сумі кубів цих виразів.

Застосуємо цю формулу для перетворення виразів:

$$1) (m + n)(m^2 - mn + n^2) = m^3 + n^3;$$

$$2) (b + 2)(b^2 - 2b + 4) = b^3 + 2^3 = b^3 + 8.$$

Помінявши місцями ліву і праву частини формули (4), дістанемо:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2). \quad (4')$$

Ця формула читається так:



сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці.

Цю формулу використовують для розкладання на множники суми кубів двох виразів.

Наприклад:

$$1) 8 + x^3 = 2^3 + x^3 = (2 + x)(4 - 2x + x^2);$$

2) $a^3 + 27b^3$. Запишемо спочатку $27b^3$ як куб виразу $3b$, а потім застосуємо формулу (4'). Маємо:

$$a^3 + 27b^3 = a^3 + (3b)^3 = (a + 3b)(a^2 - 3ab + 9b^2).$$

② **Різниця кубів.** Скористаємося формулою (4') для розкладання на множники виразу $a^3 - b^3$. Для цього запишемо його у вигляді суми:

$$a^3 - b^3 = a^3 + (-b^3) = a^3 + (-b)^3.$$

Оскільки $-b^3 = (-b)^3$, то тотожність даних виразів сумніву не викликає. А тепер розкладемо на множники $a^3 + (-b)^3$ як суму кубів виразів a і $-b$. Маємо:

$$a^3 + (-b)^3 = (a + (-b))(a^2 - a(-b) + (-b)^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Остаточно:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \quad (5)$$



Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми.

Розкладемо на множники за цією формулою вирази:

$$1) m^3 - 5^3 = (m - 5)(m^2 + 5m + 25);$$

$$2) 64a^3 - y^3 = (4a)^3 - y^3 = (4a - y)(16a^2 + 4ay + y^2).$$

Помінявши місцями ліву і праву частини формули (5), дістаємо тотожність, яку використовують для перетворення добутку різниці виразів і неповного квадрата їх суми в різницю кубів цих виразів:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3. \quad (5')$$

Наприклад:

$$1) (x - 5)(x^2 + 5x + 25) = x^3 - 5^3 = x^3 - 125;$$

$$2) (3m - 2)(9m^2 + 6m + 4) = (3m)^3 - 2^3 = 27m^3 - 8.$$



Запитання для самоперевірки

- Які з добутків можна записати у вигляді двочлена:
а) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$; б) $(a + 3)(a^2 - 6a + 9)$;
в) $(a + 3)(a^2 + 3a + 9)$; г) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$?
- На які множники розкладається:
а) сума кубів двох виразів;
б) різниця кубів двох виразів?

3. Які з виразів можна записати як суму або різницю кубів двох виразів:

- а) $a^3 + 8$; б) $m^3 - 27$; в) $x^3 + 9$;
г) $m^6 + n^3$; ґ) $x^9 - y^9$; д) $c^8 + d^8$?

Відповідь поясніть.



Задачі та вправи

Запишіть добутки у вигляді двочленів (264–265):

- 264°. а) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$; б) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$;
в) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$; ґ) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$;
г) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$; д) $(3 + x)(9 - 3x + x^2)$.
265. а) $(1 - x + x^2)(1 + x)$; б) $(4x^2 + 6x + 9)(2x - 3)$;
в) $(4x - 3)(16x^2 + 12x + 9)$; ґ) $(2x^4 + b)(4x^8 - 2bx^4 + b^2)$;
г) $(5x + 4)(25x^2 - 20x + 16)$; д) $(x^2 + y^2)(x^4 - 2x^2y^2 + y^4)$.

Спростіть вирази (266–267):

- 266°. а) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9) - a^3 + 3$;
б) $(x + 1)(x^2 - x + 1) + x^3 + 1$;
в) $(2m - 1)(4m^2 + 2m + 1) + 4 - 8m^3$;
г) $a^3 - 2b^3 + (2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$.
267*. а) $m^2(m + 1) + (m - 2)(m^2 + 2m + 4)$;
б) $8x^3 + 13 - (2x + 2)(4x^2 - 4x + 4)$;
в) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9) - a(a - 5)(a + 5)$;
г) $b(b - 1)(b + 1) - (b - 2)(b^2 + 2b + 4)$.

Розкладіть на множники двочлени (268–269):

- 268°. а) $x^3 + y^3$; б) $x^3 - y^3$; в) $m^3 - n^3$; ґ) $x^3 - 8$;
г) $27 + y^3$; д) $8x^3 - 27y^3$; е) $a^3 + 1$; є) $125 - m^3$.
269. а) $0,001 - p^3$; б) $p^3 + 0,008$; в) $0,001y^3 - x^3$;
г) $0,125x^3 - 0,064$; ґ) $\frac{1}{8}x^3 + \frac{27}{64}$; д) $\frac{27}{64}x^6 + \frac{8}{125}y^6$;
е) $64x^3 + 125y^3$; є) $y^2 - y^6$; ж) $a^9 + b^3$.

Заповніть пропущені місця одночленами так, щоб утворилися тотожності (270–271):

270. а) $(p - k)(\dots + \dots + \dots) = p^3 - k^3$;
б) $(m + n)(\dots - \dots + \dots) = m^3 + n^3$;
в) $(\dots - \dots)(\dots + \dots + \dots) = x^3 - y^3$;
г*) $(x - \dots)(\dots + \dots + y^2) = \dots - y^3$.

271. а) $c^3 - p^3 = (\dots - \dots)(c^2 + \dots + \dots)$;
б*) $(x - \dots)(\dots + xy + \dots) = \dots - y^3$;
в) $(x + 2)(x^2 - 2x + \dots) = \dots + 8$;
г*) $8m^3 + \dots = (\dots + \dots)(\dots - \dots + n^2)$.

- 272*. Розкладіть на множники двочлен $a^6 - 1$:

а) як різницю квадратів; б) як різницю кубів.

Розв'яжіть рівняння (273–274):

- 273°. а) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 2x + x^3$;
б) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) = 4x + x^3$;
в) $(x - 0,1)(x^2 + 0,1x + 0,01) = x^3 - 0,1x$.

274. а) $(4 - x)(16 + 4x + x^2) - 16x = -x^3$;
б) $(x + 5)(25 - 5x + x^2) - 25x = x^3$;
в) $(16 - 4x + x^2)(4 + x) = x^3 + 4x$.

275. Доведіть, що:

- а) $431^3 + 134^3$ ділиться на 565;
б) $21^6 + 19^3$ ділиться на 460;
в) $21^6 - 19^3$ ділиться на 422;
г) $44^6 + 8^6$ ділиться на 2000.

276. Доведіть, що три останні цифри числа $4987^3 + 13^3$ — нулі.

- 277*. Доведіть, що коли різниця двох натуральних чисел ділиться на яке-небудь число, то й різниця їх кубів ділиться на те саме число.

- 278*. Розкладіть на множники вирази:

- а) $(p - 3)^3 - 27$; б) $8 + (x + 2)^3$; в) $(a + 4)^3 + 1$;
г) $64 - (5 - b)^3$; ґ) $(6 - b)^3 - 1$; д) $(m + 7)^3 - 125$.

2.8. Застосування кількох способів перетворення виразів

У попередніх параграфах були розглянуті тотожні перетворення одночленів і многочленів. Систематизуємо їх, попарно згрупувавши взаємно обернені перетворення.

Перетворення добутку одночлена
і многочлена у многочлен (I)



$$a(b + c) = ab + ac.$$



Розкладання многочлена на множники
способом винесення спільного
множника за дужки (I')

Перетворення добутку
двох многочленів у многочлен (II)



$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$



Розкладання многочлена на множники
способом групування (II')

Перетворення добутку різниці двох виразів
та їх суми у многочлен (III)

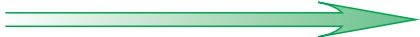


$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$



Розкладання на множники різниці
квадратів двох виразів (III')

Перетворення добутку двох однакових
двочленів у многочлен (IV)



$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Розкладання на множники тричлена,
що дорівнює сумі квадратів двох виразів
та їх подвоєного добутку (IV')

Перетворення добутку суми двох виразів
і неповного квадрата їх різниці у многочлен (V)



$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$



Розкладання на множники суми кубів двох виразів (V')

Перетворення добутку різниці двох виразів
і неповного квадрата їх суми у многочлен (VI)



$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$



Розкладання на множники різниці кубів
двох виразів (VI')

Ці перетворення використовувалися для спрощення виразів, обчислення їхніх значень, доведення тотожностей, розв'язування рівнянь тощо. Зазвичай треба було застосувати якесь одне перетворення. Але часто доводиться вдаватися відразу до кількох перетворень.

Приклад 1. Розкласти на множники вираз $2x^5 - 2x$.

Розв'язання. Розкладаючи многочлен на множники, насамперед потрібно встановити, чи не мають усі його члени спільного множника.

Якщо такий виявиться, то його можна винести за дужки. У даному випадку таким множником є $2x$:

$$2x^5 - 2x = 2x(x^4 - 1).$$

Далі з'ясуємо, чи не можна утворений у дужках многочлен розкласти на множники, користуючись однією з наведених вище тотожностей.

Вираз $(x^4 - 1)$ є двочленом, який можна записати як різницю квадратів двох виразів: x^2 і 1 , і подальші його перетворення здійснювати, користуючись тотожністю (III').

Отже,

$$\begin{aligned} 2x^5 - 2x &= 2x(x^4 - 1) = 2x((x^2)^2 - 1^2) = \\ &= 2x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 2x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Приклад 2. Розкласти на множники вираз $x^2 - 2xy + y^2 - 4$.

Розв'язання. Аналізуючи даний вираз, помічаємо, що перший його тричлен можна записати у вигляді квадрата двочлена: $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$.

Одержаний вираз $(x - y)^2 - 4$ можна перетворити в добуток як різницю квадратів виразів $x - y$ і 2 .

Маємо:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4 = (x - y)^2 - 2^2 = (x - y - 2)(x - y + 2).$$

Приклад 3. Довести, що різниця між кубом будь-якого цілого числа і цим числом ділиться на 6.

Розв'язання. Позначимо дане число, наприклад, буквою n і запишемо відповідну різницю: $n^3 - n$. Перетворимо її:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1).$$

Бачимо, що добуток складається з трьох послідовних цілих чисел (у порядку зростання): $n - 1$, n і $n + 1$.

Як ви знаєте, з трьох послідовних цілих чисел принаймні одне — парне (тобто ділиться на 2) і одне ділиться на 3. Якщо ж добуток одночасно ділиться на 2 і на 3, то він ділиться і на 6.

Інколи для спрощення виразів одне й те саме перетворення доводиться використовувати кілька разів.

Приклад 4. Спростити вираз $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$.

Розв'язання. Добуток перших двох множників на основі тотожності (III) дорівнює:

$$(a - 1)(a + 1) = a^2 - 1.$$

Далі скористаємося тотожністю (III) ще раз для перетворення добутку одержаного виразу і $(a^2 + 1)$:

$$(a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a^2)^2 - 1 = a^4 - 1.$$

І, нарешті, на основі тієї самої тотожності отримуємо остаточний результат:

$$(a^4 - 1)(a^4 + 1) = (a^4)^2 - 1 = a^8 - 1.$$

Отже,

$$\begin{aligned}(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1) &= (a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1) = \\ &= (a^4 - 1)(a^4 + 1) = a^8 - 1.\end{aligned}$$



Історична довідка



Георгій Вороний

Розкладанням многочленів на множники захоплювався в шкільні роки видатний український математик Георгій Вороний (1868–1908). Пізніше юнак вирішив випробувати свої сили у розв'язуванні складніших завдань, одним із яких було знаходження цілих додатних розв'язків рівняння $x^2 + y^2 + z^2 + 2 = mx$, де m — ціле число.

Народився Г. Вороний у с. Журавка (нині Чернігівської області). Садиба його батьків збереглася до наших днів і знаходиться в мальовничому куточку України. Вже у сорок років він досягнув видатних успіхів у математиці і здобув високий авторитет у науковому світі.



Задачі та вправи

279°. Розкладіть на множники:

а) $81p^2 - k^2$;

б) $px^2 - py^2$;

в) $7p^2 - 7k^2$;

- | | | |
|-----------------------|--------------------|---------------------|
| г) $m^2x - n^2x$; | г) $a^3 - a$; | д) $b^5 - b^3$; |
| е) $18x^3 - 2x$; | е) $18c^2d - 8d$; | ж) $0,5a^2 - 4,5$; |
| з) $0,25x^2 - 2,25$; | и) $27c^2 - 48$; | і) $2d^4 - 16d$; |
| й) $x^4 + x$; | й) $a^5 - a^2$; | к) $2b^3 + 16$. |

280°. Розв'яжіть рівняння:

- а) $x^3 - 9x = 0$; б) $25y - y^3 = 0$; в) $x^3 - 16x = 0$; г) $2x^3 - 18x = 0$.

281*. Доведіть, що значення виразу $3a^3 - 3a$ за будь-якого натурального a ділиться на 9.

282°. Запишіть у вигляді добутку двох множників:

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| а) $a^2 + 2ab + b^2$; | б) $x^2 - 4x + 4$; |
| в) $4m^2 + 4mn + 1$; | г) $9c^2 + 12cd + 4d^2$. |

Запишіть у вигляді добутку трьох множників (283–284):

- 283.** а) $2a^2 + 4ab + 2b^2$; б) $3x^2 - 12x + 12$;
в) $bx^2 + 2bxy + by^2$; г) $3b^2 - 6b + 3$.
- 284.** а) $\frac{1}{2}m^2 + mn + \frac{1}{2}n^2$; б) $\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}c^2$;

- в) $2a^3 - 0,5a$; г) $3x^2 - \frac{1}{3}$.

285. Знайдіть значення виразів раціональним способом:

- а) $x^3 - 2x^2y + xy^2$, якщо $x = 2,4$, $y = -7,6$;
- б) $(x^2 + 1)^2 - (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$, якщо $x = \frac{1}{4}$;

- в) $\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2$, якщо $a = 6,4$, $b = 3,6$;

- г) $ax^2 + 2axy + ay^2$, якщо $a = 0,4$, $x = 7,1$, $y = 2,9$.

286. Розкладіть на множники:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| а) $(x + 3)^2 - 4x^2$; | б) $3(x + 3)^2$; |
| в) $4 - (p - 2)^2$; | г) $20 - 5(p - 2)^2$; |
| г) $a^2 + 2ab + b^2 - 4$; | д) $m^2 + 14m + 49 - b^2$. |

287. Запишіть у вигляді добутку трьох множників:

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| а) $a^3 + a^2 - ab^2 - b^2$; | б) $9b + a^3 - a^2b - 9a$; |
| в) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$; | г) $ab^2 - a - b^3 - b$; |
| г) $x^3 - 4y + x^2y - 4x$; | д) $x^3 - 3y^2 + 3x^2 - xy^2$. |

288*. Розкладіть на множники:

а) $a^4 + a^3 + a + 1$;

б) $m^5 - m^3 + m^2 - 1$;

в) $3d^4 + 3d^3 - 3d - 3$;

г) $m^3 - 8 + 6m^2 - 12m$.

289*. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$;

б) $y^3 - y^2 - 16y + 16 = 0$;

в) $2x^3 + 16 - x^2 - 32x = 0$;

г) $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$.

290*. Розкладіть тричлени на множники:

а) $x^2 + 8x + 15$; б) $x^2 + 10x + 24$;

в) $x^2 - 6x + 5$; г) $x^2 - 8x + 12$.

Зразок. $x^2 + 8x + 15 = (x^2 + 8x + 16) - 1 = (x + 4)^2 - 1 =$
 $= (x + 4 + 1)(x + 4 - 1) = (x + 5)(x + 3)$.

291*. Розкладіть многочлени на множники заміною середнього його члена сумою двох одночленів:

а) $x^2 - 5x + 6$;

б) $x^2 + 6x + 8$;

в) $x^2 - 7xy + 12y^2$;

г) $x^2 - 7xy + 10y^2$;

г) $x^2 - x - 12$;

д) $x^2 - 3xy - 10y^2$.

Зразок. $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) =$
 $= (x - 3)(x - 2)$.

292. Спростіть вирази і знайдіть їхні числові значення:

а) $(6x - 1)(6x + 1) - (12x - 5)(3x + 1)$, якщо $x = 0,2$;

б) $(5 + 2x)^2 - (5 + 3x)(5 - 3x)$, якщо $x = -3$;

в) $(4 - 0,5x)^2 - (5 + 0,5x)(6 + 0,5x)$, якщо $x = -2$;

г) $(2x + 3)(2x - 3) - (2x + 1)^2$, якщо $x = -2,5$.



Завдання для самоперевірки

I – III рівні

1. Зведіть подібні члени многочленів:

а) $17x + 4x - 23x - 7x$;

б) $8a - 3 + 4a - 20$;

в) $4m + 2n - 5m - n$;

г) $9x^3 - 4x^2 + 6x^2 - 16x^3$.

2. Розкрийте дужки і спростіть:

а) $(2a - 3d) + (4a + 7d)$;

б) $4x - 3y + 2 + (5y - 3x)$;

в) $4m + 5n - (m + 3n)$;

г) $m^2 - 5n^2 - (8m^2 - 5n^2 + 3)$.

3. Знайдіть суму і різницю многочленів:
 а) $6a^2 - 3b^2$ і $18a^2 - 4b^2$; б) $12x - 4xy - 1$ і $9x - 2xy + 3$;
 в) $2,5x^2 + 3,2y^4$ і $4,3x^2 - 0,3y^4$; г) $5,4c^2 + d^2 + 5,7$ і $4,4c^2 - d^2 - 5,7$.
4. Обчисліть значення виразів, спочатку їх спростивши:
 а) $3a^2 - 2b - (4b + 3a^2)$, якщо $b = \frac{1}{6}$;
 б) $8m + 1 - (3 - 2m)$, якщо $m = 0,5$;
 в) $-5(a - 2) + 3(a + 1)$, якщо $a = 2\frac{3}{4}$;
 г) $3x - 5,8 - (2,2x - 4,2)$, якщо $x = 4,5$.
5. Перетворіть вирази у многочлени стандартного вигляду:
 а) $3(a + b + c)$; б) $7(a + b) + (a - b) \cdot 7$;
 в) $a(2a^2 - a) - 3(a - 5)$; г) $m(2m - 3n) + 2n(m - 4n)$.
6. Розкладіть многочлени на множники, винісши за дужки спільний множник:
 а) $4a^2b - 6a^2$; б) $2c^3 + 16cd$;
 в) $3mn^2 + 9m^3n - 12mn$; г) $5x^2y - 10x^2y^2 + 15x^3y^3$.
7. Знайдіть числове значення виразів, спочатку розклавши їх на множники:
 а) $a^2 - ab$, якщо $a = 7,6$; $b = 2,6$;
 б) $3,66 \cdot 0,12 + 6,34 \cdot 0,12$;
 в) $2x^2y + 4xy^2$, якщо $x = 2$; $y = -0,5$;
 г) $464 \cdot 12,8 - 264 \cdot 12,8$.
8. Розв'яжіть рівняння:
 а) $7(12x + x) + 4 = 6(x - 3)$; б) $5(4 - 8,2x) - 2(6,5x + 6) = 16$;
 в) $2(3x - 1) - 4(x + 2) = 8$; г) $4(2,4y + 3) - 6 = 2(1,8y + 1,5)$.
9. Перетворіть вирази у многочлени стандартного вигляду:
 а) $(2m + 1)(4m - 3)$; б) $(x - 3y)(x + 3y)$;
 в) $5a^2 + (a - 1)(2a + 3)$; г) $6c - (c - 4)(c + 1)$.
10. Розкладіть на множники:
 а) $px + py + kx + ky$; б) $2a^2 + 2a + 3ab + 3b$;
 в) $ax - ay - bx + by$; г) $8a + 8b - ax - bx$.

11. Обчисліть значення виразів, спочатку розклавши їх на множники:
 а) $2xy - 30x - 7y + 105$, якщо $x = 8,5$, $y = 19$;
 б) $a^2b + 3ab - 2a - 6$, якщо $a = 2$, $b = 5$.
12. Запишіть вирази у вигляді добутків:
 а) $m^2 - n^2$; б) $c^2 - 4$; в) $4c^2 - 1$;
 г) $16a^2 - 25b^2$; ґ) $0,36 - b^2$; д) $64x^2 - 36y^2$;
 е) $0,49 - y^4$; є) $0,81m^2 - 0,01n^2$.
13. Розв'яжіть рівняння, розклавши ліву частину на множники:
 а) $x^2 - 3x = 0$; б) $x^2 - 16 = 0$;
 в) $0,16 - y^2 = 0$; ґ) $2,25 - p^2 = 0$.
14. Обчисліть значення виразів, спочатку спротививши їх:
 а) $(3x + 2)(3x - 2) - 9x^2 + 2x$, якщо $x = 0,5$;
 б) $m^2 + (5 - m)(5 + m)$, якщо $m = 8,15$.
15. Запишіть вирази у вигляді многочленів:
 а) $(2x + 1)^2$; б) $(x - 34)^2$; в) $(4m + 5n)^2$; ґ) $(4 - 2d)^2$.
16. Обчисліть зручним способом:
 а) $4a^2 - 4a + 1$, якщо $a = 0,275$;
 б) $9b^2 + 6b + 1$, якщо $b = 2,6$;
 в) $m^2 + 2mn + n^2$, якщо $m = 2,13$, $n = 7,87$;
 ґ) $4x^2 - 4xy + y^2$, якщо $x = 0,75$, $y = 0,5$.

III рівень

1. Спростіть вирази:
 а) $7x - 3,5y - (2,5y + 6,2x)$; б) $3a + 4,3b + (5,7a - 6,7b)$;
 в) $0,5m^3 - 4 + (7m - 0,5m^3 - 7)$; ґ) $2,5a^2 + 4a - (2a - 3,5a^2 - 6)$.
2. Перетворіть вирази у многочлени стандартного вигляду:
 а) $a(3b + a) + b(4a - b)$; б) $4xy(x - 2y) - 3x(xy + 5y^2)$;
 в) $2m(3m^2 + 1) - 3n(m + n)$; ґ) $2y(xy^2 - 4) - 3(y + x)$.
3. Розв'яжіть рівняння:
 а) $6(0,8x + 4) + 3(0,4x - 8) = 3$;
 б) $4(1,2 - 5x) - 0,6(8 - 8x) = 15,2$;
 в) $4(0,4y + 2) + 2(0,2y - 4) = 2$;
 ґ) $6(0,6y - 2,5) - 9(4 - 4y) = 29,2$.

4. Доведіть тотожності:
- $5a^2 - 3(a+1)(a-1) = 2a^2 + 3$;
 - $7(n^2 - 2) - 4(n+3)(n-3) = 3n^2 + 22$;
 - $x - 2y(x+2y) + 4y^2 = x(1-2y)$;
 - $b^2 + 2a - b(2a+b) = 2a(1-b)$.
5. Доведіть, що значення виразів не залежить від c :
- $5c(4,8c^2 - 6c) - 8(3c^3 - 3,75c^2 + 2)$;
 - $3(5,2c^2 - 1,3c + 4) - 2,6c(6c - 1,5)$.
6. Доведіть, що:
- сума трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3;
 - сума натурального числа і його квадрата є парним числом.
7. Розв'яжіть рівняння:
- $3x^2 - 4x = 0$;
 - $2y^3 + y^2 = 0$;
 - $(x-3)(x-5) - x^2 = -1$;
 - $(4x-3)(x+1) - (2x-1)(2+2x) = 0$.
8. Обчисліть значення виразів:
- $(3m-2n)(4m+n) - (2m+n)(6m-2n)$, якщо $m = -\frac{4}{7}$, $n = 0,25$;
 - $a(a+b)^2 - b(a-b)^2 + 2b(a^2+b^2)$, якщо $a = 2,5$, $b = 0,5$;
 - $2x^2 \cdot 7xy^2 - 4x^2y(-xy) - 3x \cdot 5x^2y^2$, якщо $x = 3$, $y = 5$;
 - $5x^3(-3y^2) - 2x^2y^2 \cdot 8x + 6xy^2 \cdot 3x^2$, якщо $x = -2$, $y = 4$.
9. Якщо одну сторону квадрата збільшити на 3 см, а другу — зменшити на 2 см, то дістанемо прямокутник, площа якого на 4 см^2 більша за площу квадрата. Обчисліть довжину сторони квадрата.
10. Запишіть вирази у вигляді добутків:
- $a^3 - 4a^2 - 25a + 100$;
 - $2y - 26y^2 - 13y + 1$;
 - $a^2c^2 + a^2d^2 - bc^2 - bd^2$;
 - $2mk^2 + n^2k^2 - 2mp - n^2p$.
11. Обчисліть зручним способом:
- $43 \cdot 29 + 27 \cdot 11 + 43 \cdot 11 + 27 \cdot 29$;
 - $93 \cdot 52 - 38 \cdot 43 \cdot 43 \cdot 52 + 93 \cdot 38$;
 - $109 \cdot 9,17 - 6,37 \cdot 72 \cdot 9 \cdot 9,17 \cdot 3,63 \cdot 72$;
 - $123 \cdot 1,32 - 28 \cdot 0,148 \cdot 123 \cdot 0,468 + 151 \cdot 0,148$.

12. Доведіть, що значення виразів не залежать від значення змінної:
- а) $(x - 10)(x + 10) - (x + 15)(x - 15)$;
 б) $(4y - x)(x + 4y) + (2x - 4y)(2x + 4y) - 3x^2$;
 в) $(a - 9)^2 + (8 - a)(a + 6) + 16a$;
 г) $(x - 7)^2 + 2(x - 7)(1 - x) + (1 - x)^2$.
13. Розв'яжіть рівняння:
- а) $(x + 7)^2 + 3 = (x - 2)(x + 2)$; б) $9x^2 - (3x - 5)^2 = 20$;
 в) $(x + 6)^2 - (x - 5)(x + 5) = 79$; г) $(x - 7)^2 - 8x(x - 7) = 0$.
14. Обчисліть значення виразів:
- а) $(x^2 + 0,2x + 0,04)(x - 0,2) - x^3$, якщо $x = \frac{3}{71}$;
 б) $0,01a^3 - (0,1a + 2)(0,01a^2 - 0,2a + 4)$, якщо $a = 10$.
15. Розкладіть вирази на множники:
- а) $2 + x^2(x - 2) - x$; б) $x + x^3(x - 2) - 2$;
 в) $2x^3 - 8x - 12 + 3x^2$; г) $x^4 - 2x + x^3 - 2$.

IV рівень

1. Дано многочлен $x^4 - 2x^3 + 8x - 4$. Який многочлен потрібно:
- а) додати до нього, щоб дістати многочлен $1 + 4x^4 - 2x^2 - 3,5x^3$;
 б) відняти від нього, щоб дістати многочлен $9x + 3 + 2x^4$?
2. Доведіть, що:
- а) різниця двоцифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 9;
 б) сума двоцифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 11.
3. Обчисліть зручним способом:
- а) $6,9 \cdot 75 + 37,5 \cdot 21,4 + 37,5 \cdot 4,8$;
 б) $12,62 + 12,6 \cdot 17,2 - 6,3 \cdot 140,4$.
4. Кількість десятків двоцифрового числа вдвічі більша за кількість його одиниць. Якщо від цього числа відняти суму його цифр, то дістанемо 54. Знайдіть це число.
5. Розв'яжіть рівняння:
- а) $(2x - 3)(3x - 1) - (6x + 2)(x - 5) = 25$;
 б) $x(4x + 11) - 7(x^2 - 5x) = 57x$;

в) $2(3x - 1)(2x + 5) - 6(2x - 1)(x + 2) = 46$;

г) $x(2x + 3) - 5(x^2 - 3x) = 3x(7 - x)$.

6. Обчисліть значення виразів:

а) $30ax + 45bx - 45by - 30ay$, якщо $2a + 3b = 7,5$ і $x - y = 4$;

б) $2ax - by - bx + 2ay$, якщо $2a - b = 3$ і $x + y = 5$.

7. За якого значення a значення виразу $a^2 + 7a$ втричі більше за значення виразу $7 + a$?

8. Розкладіть на множники:

а) $x^3 + 7x^2 - x - 7$;

б) $(4 - x^2)^2 - 9x^4$.

9. Доведіть, що значення двочлена $x^3 - x$ за всіх цілих значень x кратне 6.

10. Доведіть, що значення виразів не залежать від значення змінної:

а) $(x - 7)^2 + 2(8x - x^2 - 7) + (1 - x)^2$;

б) $(2x + 7)^2 - 2(4x^2 + 8x - 21) + (2x - 3)^2$.

11. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних парних натуральних чисел дорівнює подвоєній сумі цих чисел.

12. Якого найменшого значення набуває кожний вираз і за яких значень x :

а) $(x - 3)^2 + 5$;

б) $(x + 2)^2 - 3$;

в) $x^2 - 10x + 26$;

г) $x^2 + 6x + 7$?

13. Виправте помилки, якщо вони допущені:

а) $(3a + 4)(9a^2 - 12a + 16) = 27a^3 + 64$;

б) $0,08 - 27x^3 = (0,2 - 3x)(0,04 + 1,2x + 9x^2)$.

14. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$;

б) $x^8 - 1 = 0$;

в) $x^3 + 10x^2 + 25x = 0$;

г) $x^8 + 1 = 0$.



Здійснюємо самооцінку навчальних досягнень

У результаті засвоєння матеріалу цього розділу ви маєте

знати:

- що таке числове значення алгебраїчного виразу і як його знайти;
- які вирази називають тотожно рівними;
- способи доведення тотожностей;
- властивості степеня з натуральним показником;
- що таке одночлен (многочлен);
- як звести одночлен до стандартного вигляду;
- як знайти суму, різницю многочленів;
- як знайти добуток: одночлена і многочлена; двох многочленів;
- формули скороченого множення;
- способи розкладання многочленів на множники;

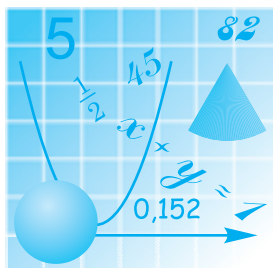
розуміти і вміти пояснити:

- чим відрізняється одночлен (многочлен) стандартного вигляду від одночлена (многочлена), не зведеного до стандартного вигляду;
- на основі яких математичних законів: а) зводять подібні члени многочлена; б) знаходять добуток одночлена і многочлена;
- який взаємозв'язок існує між: а) множенням многочлена на одночлен і розкладанням многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки; б) множенням многочлена на многочлен і розкладанням многочлена на множники способом групування;

вміти обґрунтовувати:

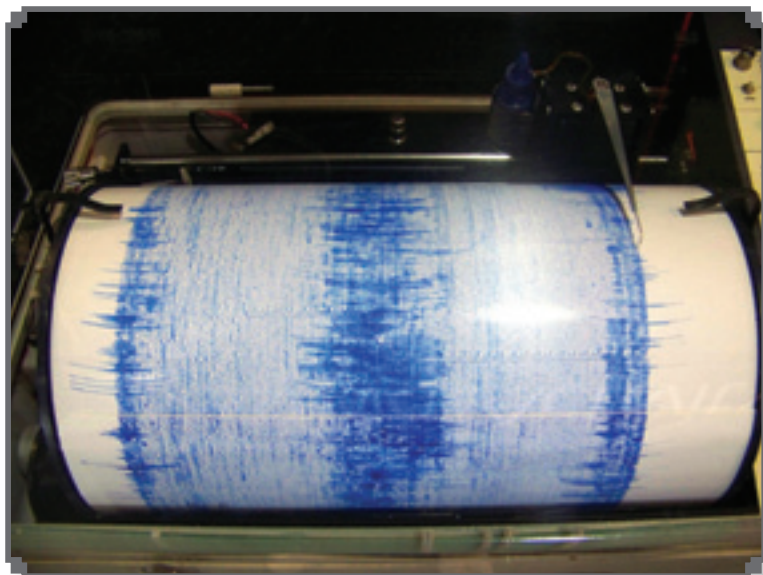
- властивості степеня з натуральним показником;
- формули скороченого множення;

успішно розв'язувати задачі і вправи, подібні до вміщених у цьому розділі.



Розділ II

ФУНКЦІЯ



§3.

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ФУНКЦІЮ

3.1. Поняття функції.

Область визначення
і область значень функції

① **Що таке функція.** Аналізуючи різні процеси, явища, можна помітити, що у багатьох випадках величини, які їх характеризують, перебувають у певній залежності одна від одної, коли зміна значень однієї величини спричиняє зміну значень іншої. Наприклад, зміна швидкості v автомобіля спричиняє зміну часу t , необхідного для подолання відстані, скажімо, 300 км, між двома населеними пунктами (зі збільшенням швидкості такий час зменшується і навпаки). Тому його (час) називають **залежною змінною**, а швидкість, яка може змінюватися довільно, — **незалежною змінною**. До того ж у даному випадку можна не лише вказати загальний характер залежності між зазначеними величинами, але і для кожного значення швидкості руху автомобіля знайти відповідне значення часу, необхідного для подолання відстані 300 км, за формулою $t = \frac{300}{v}$. Зокрема, якщо $v = 60$ км/год, то

$t = \frac{300}{60} = 5$ (год); якщо $v = 75$ км/год, то $t = \frac{300}{75} = 4$ (год) і т.д. Зверніть увагу, що кожного разу певному значенню швидкості відповідає лише одне значення часу.

Приклад 1. Площа S квадрата залежить від довжини його сторони a : збільшення (зменшення) довжини сторони квадрата зумовлює збільшення (зменшення) його площі. У даному випадку незалежною змінною є довжина сторони a квадрата, а залежною — його площа S . Формула, яка описує цю залежність, як відомо, має вигляд: $S = a^2$. Підставляючи в неї замість a довільні значення довжин сторони квадрата, кожного разу діставатимемо по одному відповідному значенню його площі.

Приклад 2. Значення атмосферного тиску p залежить від висоти h над рівнем моря, на якій його вимірюють: зі збільшенням висоти тиск зменшується, що можна прослідкувати за таблицею:

h (метри)	0	105	420	1220	2100	3675
P (мм ртутного стовпчика)	760	750	720	640	560	410

Крім з'ясування характеру залежності атмосферного тиску від висоти таблиця дає також змогу для кожного вміщеного тут значення висоти однозначно вказати відповідне значення тиску.

Усі розглянуті залежності стосуються зміни величин різного характеру, але їх об'єднує спільна ознака: **кожному значенню однієї величини (незалежної змінної) відповідає лише одне значення іншої (залежної змінної), яке можна знайти за певним правилом.** Такі залежності називаються **функціональними**, а саме правило називається **функцією**.

У перших двох розглянутих прикладах зазначене правило подано у вигляді відповідної формули, у третьому — у вигляді таблиці.

Характеристичною ознакою функціональної залежності між змінними величинами є існування у кожному випадку **лише одного** значення залежної змінної, відповідного даному значенню незалежної змінної (кажуть, між значеннями незалежної і за-

лежної змінних існує однозначна відповідність). Якщо ця умова порушена, то залежність не є функціональною. Зокрема, не є такою залежність номера місця у глядачевій залі театру від вартості купленого квитка, бо одній і тій самій вартості може відповідати декілька десятків місць у різних рядах глядачевої зали.

З розглянутих прикладів видно, що у функціональних залежностях змінні величини можуть позначатися різними буквами латинського алфавіту, що зумовлено їхнім змістом. У першому випадку v — незалежна змінна, t — залежна змінна, у другому — відповідно a і S , у третьому — h і p . Коли йдеться про функціональну залежність у загальному вигляді, то незалежну змінну зазвичай позначають буквою x , залежну — буквою y , а саме правило (функцію), за яким за даним значенням x знаходять відповідне значення y — буквою f . Тоді факт функціональної залежності у від x записують так: $y = f(x)$ (читають: «ігрек дорівнює еф від ікс»).

Незалежну змінну у функціональній залежності ще називають **аргументом**.

② Область визначення функції. Незалежна змінна у кожній функціональній залежності може набувати певних значень, які визначаються змістом цієї залежності, сутністю тих процесів або явищ, яких вона стосується, тощо. Так, довжина сторони квадрата у формулі $S = a^2$ може виражатися будь-яким додатним числом. А ось, якщо розглядати функцію, яка задає залежність вартості m куплених зошитів ціною 3 грн за зошит від їх кількості n , що виражається формулою $m = 3n$, то тут незалежна змінна n може набувати лише натуральних значень.

Сукупність усіх значень (або інакше, множину значень), яких набуває незалежна змінна (аргумент), називають **областю визначення функції**.

Кожному значенню аргументу з області визначення функції відповідає певне значення залежної змінної, яке ще називають **значенням функції**. Усі ці значення утворюють множину, яку називають **областю значень функції**.

Схематичне зображення функції f подано на рисунку 18.

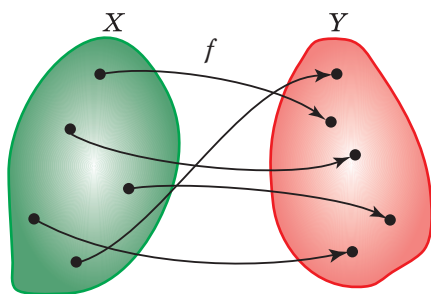


Рис. 18

На ньому умовно зображено дві множини: X — область визначення функції та Y — область значень функції, де кожна точка множини X зображує певне значення аргументу x , а кожна точка множини Y — певне значення функції. Лінії зі стрілками задають правило f , яке для кожного значення

аргументу з області визначення функції вказує відповідне значення функції.

Розглянемо ще дві залежності, зображені на рисунках 19, 20. Чи є вони функціональними? Щоб з'ясувати це, скористаємось означенням функціональної залежності, а саме — перевіримо, чи відповідає *кожному* значенню незалежної змінної x *лише одне* значення залежної змінної y .

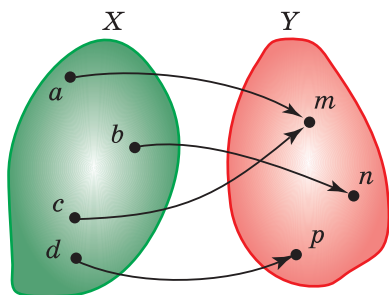


Рис. 19

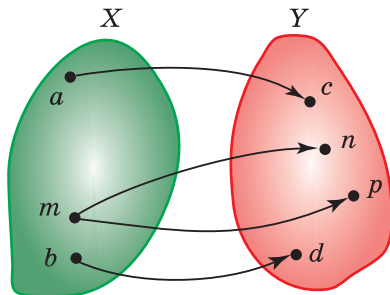


Рис. 20

Очевидно, що у випадку, зображеному на рисунку 19, ця умова виконується, а на рисунку 20 — ні, бо значенню m незалежної змінної відповідають два різних значення n і p залежної змінної. Отже, залежність, зображена на рисунку 19, є функціональною, а залежність, зображена на рисунку 20, не є функціональною.



Запитання для самоперевірки

1. Яку залежність між двома змінними називають функціональною? Наведіть приклади функціональних залежностей.
2. Як називаються змінні, які перебувають у функціональній залежності?
3. Як називають правило, за яким для кожного значення незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної?
4. Як у загальному вигляді позначають функціональну залежність між змінними x і y ?
5. Що називають областю визначення функції?
6. Що таке область значень функції?



Задачі та вправи

- 293°.** Поясніть, чому залежність периметра P квадрата від довжини a його сторони є функціональною.
- а) Назвіть аргумент і залежну змінну у цій залежності;
 - б) запишіть формулу, що виражає відповідну функцію;
 - в) знайдіть значення функції для таких значень аргументу: 3; 4,5; 5,75; 7,25.
- 294°.** Запишіть за допомогою формули залежність об'єму V куба від довжини a його ребра.
- а) Поясніть, чому ця залежність є функціональною;
 - б) назвіть аргумент і залежну змінну відповідної функції;
 - в) обчисліть значення функції для таких значень аргументу: 2; 5; 4,1; 12.
- 295°.** Запишіть формулу для обчислення площі круга. Залежність між якими двома змінними вона виражає? Чи є ця залежність функціональною? Відповідь обґрунтуйте.
- 296.** Периметр прямокутника дорівнює 16 одиниць довжини. Виразіть залежність довжини a сторони прямокутника від довжини b суміжної сторони. Обчисліть значення a для таких

значень b : 2,5; 4; 6; 3. Поясніть, чому ця залежність є функціональною; вкажіть аргумент відповідної функції.

297°. Задайте формулою залежність градусної міри y кута від градусної міри x суміжного з ним кута. Поясніть, чому правило, за допомогою якого за даним значенням градусної міри кута знаходять градусну міру суміжного з ним кута, є функцією. Знайдіть область значень цієї функції, якщо область її визначення утворюють такі градусні міри: а) 16° ; б) 40° ; в) 90° ; г) 110° ; ґ) 150° .

298. На рисунках 21–26 схематично зображено шість залежностей між змінними x і y . Укажіть, які з них є функціональними. Запишіть числа, позначені буквами, що утворюють область визначення і окремо область значень кожної з відповідних функцій.

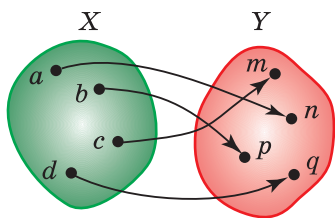


Рис. 21

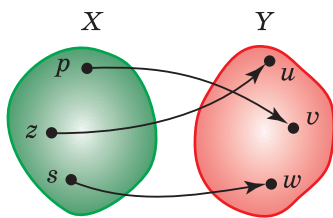


Рис. 22

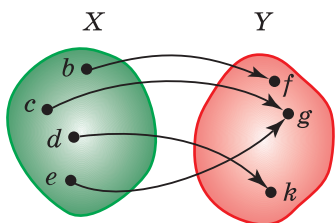


Рис. 23

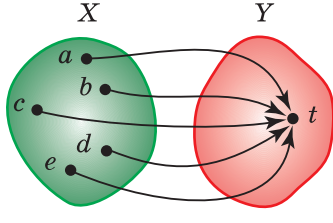


Рис. 24

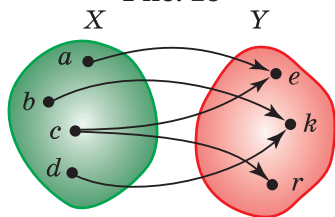


Рис. 25

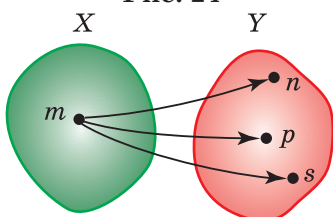


Рис. 26

299. 1) Кожному з чисел 1; 4; 25; 49; 100 поставлено у відповідність числа, квадрати яких дорівнюють даним числам. Чи є таке правило функцією?
- 2) Кожному з невід'ємних чисел відповідають числа, модулі яких дорівнюють даним числам. Чи є правило, яке встановлює таку відповідність, функцією?
- 300*. Знайдіть неточності у твердженнях і поясніть їхню сутність. Залежність між змінними x і y є функцією, якщо:
- а) кожному значенню змінної x відповідає значення змінної y ;
 - б) одному значенню змінної x відповідає одне значення змінної y .
- Проілюструйте за допомогою схематичних зображень хибність наведених тверджень.

3.2. Способи задання функції

① Що означає «задати функцію». *Задати функцію* — означає вказати область її визначення, тобто множину значень, яких набуває аргумент, і правило, за яким для кожного з цих значень знаходять відповідне значення функції.

Є кілька способів задання функції, які відрізняються один від одного передусім характером правила, що встановлює відповідність між значеннями аргументу і функції.

② Аналітичний спосіб. У цьому випадку правило записане у вигляді *формули*. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Область визначення функції — множина цілих чисел від -3 до 4 включно. Правило знаходження за даним значенням аргументу відповідного значення функції виражено формулою $y = 2x^2$.

За цими даними для кожного значення x із множини чисел $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$, які утворюють область визначення функції,

можна знайти відповідне значення функції. Для цього потрібно у формулу замість x підставити числове значення і виконати обчислення. Зокрема:

$$\text{якщо } x = -3, \text{ то } y = 2 \cdot (-3)^2 = 2 \cdot 9 = 18;$$

$$\text{якщо } x = -2, \text{ то } y = 2 \cdot (-2)^2 = 2 \cdot 4 = 8;$$

$$\text{якщо } x = -1, \text{ то } y = 2 \cdot (-1)^2 = 2 \cdot 1 = 2 \text{ і т. д.}$$

Можливий і такий запис виконання цього завдання.

Позначимо дану функцію буквою f . Тоді $f(x) = 2x^2$. $f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 = 2 \cdot 9 = 18$; $f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 = 2 \cdot 4 = 8$ і т.д.

Приклад 2. Область визначення функції — множина парних чисел першого десятка. Правило обчислення значення функції за даним значенням аргументу виражає формула $y = x + 2$.

Маючи ці дані, можна, як і в попередньому випадку, для кожного значення аргументу x з області визначення функції (а це числа 2, 4, 6, 8, 10) знайти відповідне значення функції y , послідовно підставляючи значення x у дану формулу:

$$x = 2, y = 2 + 2 = 4;$$

$$x = 4, y = 4 + 2 = 6;$$

$$x = 6, y = 6 + 2 = 8 \text{ і т.д.}$$

Або інша форма запису:

$$f(x) = x + 2;$$

$$f(2) = 2 + 2 = 4;$$

$$f(4) = 4 + 2 = 6 \text{ і т.д.}$$

У багатьох випадках, задаючи функцію аналітично, вказують лише формулу і нічого не кажуть про область її визначення. У такому разі областю визначення функції вважають множину значень змінної, для яких вираз, що стоїть у правій частині формули, має сенс.

Приклад 3. Функцію задано формулою $y = 3x + 2$.

Областю її визначення є множина всіх раціональних чисел, бо вираз $3x + 2$ має сенс для будь-якого значення x .

Приклад 4. Для функції $y = \frac{3x}{x-4}$ областю визначення є множина всіх раціональних чисел, крім $x = 4$, бо, якщо $x = 4$, вираз $\frac{3x}{x-4}$ не має смислу (знаменник дробу дорівнює 0).

Приклад 5. Областю визначення функції $y = \frac{x+3}{x(x-1)}$ є множина всіх чисел, крім $x = 0$ та $x = 1$. Поясніть, чому.

Зрозуміло, що в прикладах 3–5 й аналогічних випадках область визначення функції складається з безлічі чисел, на відміну від наведених у прикладах 1 і 2 функцій, де області визначення містять скінченний набір значень аргументу.

③ Табличний спосіб. Це найпростіший спосіб задання функції. Суть його в тому, що в одному рядку таблиці записують усі значення аргументу (тобто зазначають область визначення функції), а під ними — відповідні значення функції.

Наприклад, до таблиці занесли результати вимірювань атмосферного тиску (у мм ртутного стовпчика), що здійснювалися через кожні 2 год з 6 до 18 год одного дня.

Час	6	8	10	12	14	16	18
Тиск	748	750	751	751	750	749	749

Ця таблиця задає функцію, область визначення якої — множина парних чисел від 6 до 18 включно, що відповідають значенням часу, кожному з яких відповідає одне значення атмосферного тиску. У даному випадку область значень функції — множина натуральних чисел від 748 до 751.

Прикладами табличного задання функції є різні таблиці, зокрема квадратів чисел, кубів чисел тощо.

Зручність табличного способу полягає в тому, що не потрібно проводити обчислення — усе задано відразу: і множина значень аргументу, і множина відповідних значень функції. Зрозуміло, що цим способом можна задати лише таку функцію, область визначення якої містить обмежену кількість значень аргументу (кажуть: множина значень аргументу скінченна).

④ Функцію можна задати **способом словесного опису**. Однією з відомих таких функцій є функція *антьє* (ціла частина числа), назва якої походить від французького слова *entier* — цілий. Областю визначення цієї функції є множина всіх чисел. Правило знаходження відповідних значень функції таке: кожному з чисел області визначення ставиться у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує даного. Наприклад, для 3,5 відповідним числом (значенням функції) є 3, для 5,9 — число 5, для 4 — число 4, для -6,8 — число -7, для -0,3 — число -1 і т.д.



Запитання для самоперевірки

1. Що означає поняття «задати функцію»?
2. Які способи задання функції ви знаєте? Проілюструйте кожен із них прикладами.
3. Як знайти область визначення функції, заданої формулою, якщо немає ніяких додаткових зауважень щодо цього?
4. Школа має 2000 грн, які витрачає на закупівлю підручників з певного предмета за ціною 20 грн за один примірник. Неважко встановити, що залежність між сумою S грошей, які в неї залишаються, і кількістю n закуплених підручників виражається формулою $S = 2000 - 20n$. Чи є ця залежність функціональною?



Задачі та вправи

301°. Функцію f задано формулою $f(x) = 2x + 5$. Яка область визначення цієї функції? Знайдіть значення функції для таких значень аргументу:

- а) 4; б) -6,5; в) 0; г) -2,5.

302. Знайдіть область визначення функцій:

$$\begin{array}{llll} \text{а}^{\circ}) y = x - 4; & \text{б}^{\circ}) y = \frac{6}{x-4}; & \text{в}^{\circ}) y = \frac{2}{x}; & \text{г}^{\circ}) y = \frac{3}{x^2+1}; \\ \text{д}^{\circ}) y = \frac{1}{x(x+1)}; & \text{е}^{\circ}) y = \frac{5}{|x|-2}; & \text{ж}^{\circ}) y = \frac{x}{x^2-16}. \end{array}$$

303. Знайдіть значення кожної із функцій, указаних у попередньому завданні, для таких значень аргументу:

а) 3; б) -3; в) 5; г) 1.

304°. Функцію задано формулою $y = \frac{4x-2}{5}$, де x набуває цілих значень від -1 до 5. Запишіть числа, що утворюють область визначення цієї функції. Знайдіть числа, що утворюють область її значень.

305. 1) Функцію, областю визначення якої є всі непарні числа першого десятка, задано формулою $y = x^2 + 3$. Знайдіть область значень цієї функції. Задайте цю функцію таблицею.
2) Областю визначення функції f є множина натуральних чисел першого десятка. Для знаходження відповідного значення функції від потрошеного числа з області визначення віднімають 12. Задайте цю функцію формулою і знайдіть її область значень.

306*. Знайдіть найбільше значення функції $y = x^2 - x - 3$, областю визначення якої є всі цілі числа від -2 до 3 включно.

307°. Залежність між змінними x і y задано таблицею:

x	-3	5	-6	8	6	1	9	8
y	0	4	1	2	7	3	5	6

Чому ця залежність не є функціональною?

308. Які з таблиць а)–г) задають функцію?

а)

x	0	-3	5	2	4	0	4	1
y	2	1	4	7	-9	3	8	5

б)

x	-6	-4	-3	-1	0	2	6	10
y	-1	0	2	7	5	4	9	0

в)

x	1	2	3	4,5	6	7	8	9
y	1	2	5	8	11	13	14	15

г)

x	-5	0	2	7	12	15	16	17
y	4	4	4	4	4	4	4	4

309*. Складіть дві таблиці, що задають залежності між змінними x і y , одна з яких є функціональною, а друга — ні.

3.3. Графік функції. Графічний спосіб задання функції



Пригадайте

1. Що вам відомо про координатну площину, зокрема:
 - а) як називаються координатні осі;
 - б) скільки координат визначає положення точки на координатній площині і як вони називаються;
 - в) що означає запис $A(-3; 2)$?
2. Зобразіть координатну площину і поясніть:
 - а) як знайти координати будь-якої точки на ній;
 - б) як побудувати точку за її координатами.

① **Графік функції.** Складемо таблицю квадратів перших п'яти натуральних чисел x .

x	1	2	3	4	5
$y = x^2$	1	4	9	16	25

Ця таблиця задає функцію, бо кожному з даних у ній значень змінної x відповідає одне значення змінної y .

Побудуємо на координатній площині точки, координатами яких є відповідні значення x і y із таблиці: $(1; 1)$, $(2; 4)$, $(3; 9)$, $(4; 16)$, $(5; 25)$. Одержали п'ять точок, множину яких називають **графіком** даної **функції** (рис. 27).

Отже,



графік функції — це множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, що утворюють область визначення функції, а ординати — відповідним значенням функції.

Якщо функцію задано табличним способом, то побудова її графіка не викликає труднощів, бо координати всіх його точок містяться в таблиці. Крім того, кількість таких точок завжди виражається певним числом.

Інша річ — побудова графіка функції, заданої аналітично.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y = x^2 - 2$, областю визначення якої є цілі числа від -3 до 3 включно.

Розв'язання. На відміну від попереднього випадку нам відомі лише абсиси точок графіка: $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$. Відповідні ординати цих точок знайдемо, підставляючи у формулу $y = x^2 - 2$ дані значення x і виконуючи відповідні обчислення; значення x і y занесемо до таблиці.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	2	-1	-2	-1	2	7

Тепер побудуємо на координатній площині точки з координатами $(-3; 7)$, $(-2; 2)$, $(-1; -1)$, $(0; -2)$, $(1; -1)$, $(2; 2)$, $(3; 7)$ (рис. 28). Множина цих семи точок і є графіком даної функції.

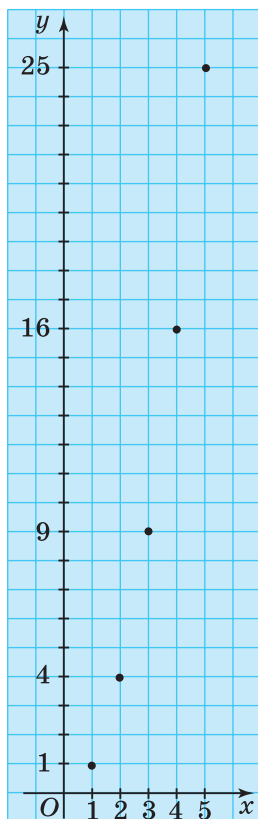


Рис. 27

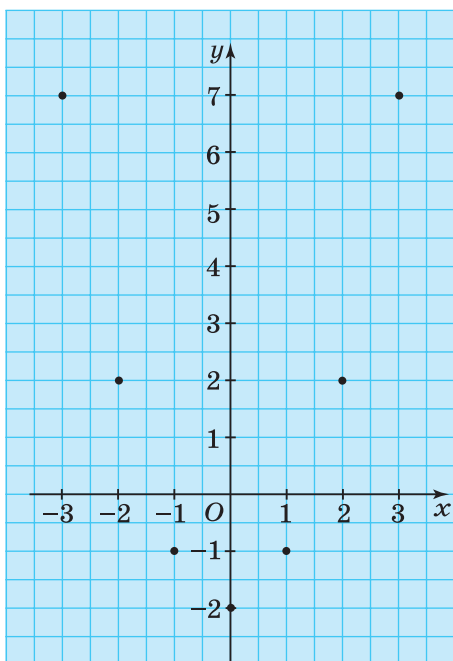


Рис. 28

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = x^2 - 2$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є множина всіх чисел, бо вираз $x^2 - 2$ має смисл для будь-якого значення x . Отже, якщо в прикладі 1 графік функції утворювали лише сім точок, то тут таких точок буде безліч. Усі їх, звичайно, побудувати неможливо. У таких випадках обмежуються побудовою кількох точок графіка, через які потім проводять відповідну лінію.

Оскільки x — будь-яке число, то можна довільно обирати його значення і знаходити відповідне значення y . Наприклад, якщо $x = 0$, то $y = x^2 - 2 = -2$. Щоб не виконувати зайвих обчислень, скористаємося точками, побудованими під час розгляду попереднього прикладу. Провівши через них і точку $(0; -2)$ суцільну лінію, дістанемо графік функції $y = x^2 - 2$ (рис. 29).

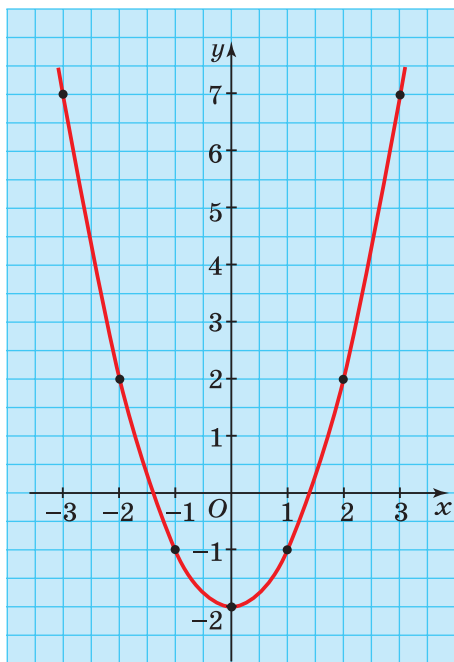


Рис. 29

Побудований графік утворюють безліч точок, але всі вони мають спільну властивість: підставивши координати будь-якої з них у формулу, що задає функцію, дістанемо тотожність.

На основі цієї властивості встановлюють, чи належить точка графіку функції, чи ні.

З'ясуємо, наприклад, чи належить побудованому графіку функції $y = x^2 - 2$ точка $A(3; 5)$.

У даному випадку $x = 3$, $y = 5$. Підставивши ці значення у формулу $y = x^2 - 2$, маємо: $5 = 3^2 - 2$; $5 = 9 - 2$; $5 = 7$. Остання рівність неправильна, отже, точка A графіку даної функції не належить.

А ось точка $B(-2; 2)$ належить цьому графіку, бо $y = x^2 - 2 = (-2)^2 - 2 = 2$, що відповідає умові (ордината даної точки за умовою теж дорівнює 2).

② Графічний спосіб задання функції. На рисунку 30 зображено частину стрічки термографа (приладу для безперервного автоматичного запису температури) з графіком зміни температури повітря в певній місцевості протягом доби. По горизонтальній осі (осі абсцис) тут відкладено значення часу вимірювання, а по вертикальній осі (осі ординат) — значення температури повітря. За цим графіком досить просто знайти температуру повітря в певний час доби. Щоб це зробити, наприклад, для 8 год ранку, достатньо знайти на графіку точку з абсцисою 8 і за допомогою того ж таки графіка визначити її ординату. Таким чином, о 8 год ранку температура повітря становила наближено $-2,7^\circ\text{C}$.

Залежність між температурою повітря і часом її вимірювання, яку задає накреслений самописцем термографа графік, є функціональною, бо кожному значенню часу від 0 до 24 год відповідає лише одне значення температури. Отже, зображений на рисунку 30 графік задає певну функцію, оскільки він указує на область

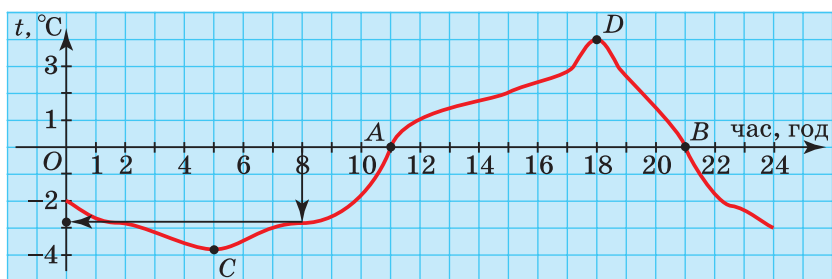


Рис. 30

її визначення (множина чисел від 0 до 24) і дає можливість для кожного значення незалежної змінної (часу вимірювання) знайти відповідне значення залежної змінної (температури повітря).

Спосіб задання функції за допомогою її графіка називається **графічним способом**.

Графік функції може багато «розповісти» про неї. Так, за даним графіком можна знайти час, коли температура повітря протягом доби опускалася нижче від нуля, була вищою за нуль, дорівнювала нулю, коли вона підвищувалася, знижувалася тощо.

Оскільки значення температури дорівнює ординаті (y) відповідної точки графіка, то, щоб визначити, коли температура була нульовою, потрібно на графіку знайти точки, ординати яких дорівнюють нулю. Як відомо, усі такі точки лежать на осі абсцис (Ox), тому шуканими є точки перетину графіка з віссю абсцис. У даному випадку їх дві: A і B ; одна відповідає часу 11 год, друга — 21 год. Отже, нульова температура фіксувалася двічі — об 11 год і о 21 год.

Щоб визначити період доби, коли температура повітря була вищою від нуля (додатною), слід знайти точки графіка з додатними ординатами, тобто ті, що розміщені над віссю абсцис. Із рисунка бачимо, що частина графіка, яка лежить над віссю абсцис, знаходиться у проміжку між 11 і 21 годинами, не включаючи цих крайніх значень (тоді температура дорівнювала нулю). Відповідно нижчою від нуля (від'ємною) температура повітря була від початку доби до 11 год та між 21 і 24 годинами.

Найнижча температура, зафіксована термометром протягом доби, становила наближено $-3,8\text{ }^{\circ}\text{C}$ (ордината найнижчої точки C графіка), а найвища становила $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ тепла (ордината найвищої точки D графіка).

Підвищенню (зростанню) температури відповідає та частина графіка, яка піднімається вгору, якщо рухатися вздовж його кривої зліва направо. У даному випадку — це частина графіка між точками C і D , що відповідає періоду доби приблизно від 5 год до 18 год. Відповідно у період від 0 год до 5 год та з 18 год до 24 год температура повітря знижувалася.

Отже, аналізуючи розглянутий графік функції, нам удалось встановити багато характеристик того процесу (у нашому випадку — стану температури повітря протягом доби), який описує дана функція. Тобто реальний природний процес ми характеризували на основі його **математичної моделі**, якою є дана функція. Подібним чином вивчають багато інших процесів, явищ за допомогою математики. Спочатку утворюють математичну модель об'єкта вивчення (відповідну функцію, хоча такою моделлю може бути не лише функція), а потім специфічними математичними методами досліджують цю функцію, співвідносячи здобуті результати з об'єктом вивчення. З окремими методами дослідження функцій ви познайомитеся у процесі подальшого вивчення математики.



Цікаво знати

Прилади-самописці, що фіксують значення певних величин і автоматично креслять графіки залежностей між ними, широко використовуються в різних галузях людської діяльності, зокрема в геології, медицині тощо. Так, спеціальні прилади — сейсмографи — автоматично записують у вигляді ліній (сейсмограм) коливання земної кори. Сейсмограми дають можливість визначати, коли і де був землетрус, яка була його сила.

Електрокардіограми, які фіксують роботу серця і дають змогу судити про порушення в його роботі, теж можна вважати своєрідними графіками. Наприклад, на рисунку 31 зображено кардіограму серця здорової людини. На ньому коротка «хвиля» (1) характеризує скорочення передсердь, пік (2) свідчить про скорочення шлуночка, «хвиля» (3) показує, наскільки добре серце наповнене кров'ю. На рисунку 32 — кардіограма людини, яка перенесла серцевий напад. Аналізуючи зміни, що відбули-

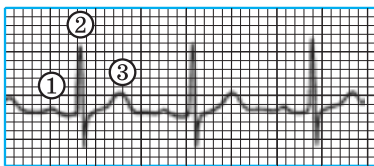


Рис. 31

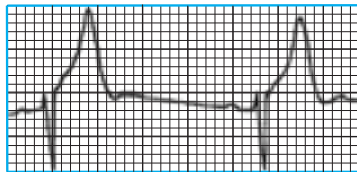


Рис. 32

ся в роботі серця і відображені на графіку, лікар-кардіолог установлює діагноз та визначає режим лікування хворого.



Історична довідка

Першими координатами, які застосовувалися систематично, були географічні (широта і довгота), а також астрономічні координати. Ідеєю координат володіли давньогрецькі вчені Архімед і Аполлоній ще у III ст. до н. е.



Рене Декарт

Французький математик Н. Орем (1323–1382) вперше застосовував координати на площині. Для побудови графіків він користувався термінами «довгота» і «широта», що відповідають сучасним поняттям абсциси й ординати. Метод координат майже одночасно розробили й застосували для дослідження ліній французькі вчені П. Ферма (1601–1665) і Р. Декарт (1596–1650).

Оскільки Р. Декарт першим опублікував опис цього методу (у книзі «Геометрія» в 1637 р.), то математики часто користуються термінами «декартові координати», «декартова система координат».

Надзвичайно велику роль відіграло запровадження методу координат у геометрії, що дало можливість застосувати алгебраїчний апарат до дослідження геометричних образів. Цим займається спеціальна математична дисципліна — *аналітична геометрія*.



Готфрід Лейбніц

У наш час координати широко застосовуються не лише в математиці, а й у фізиці, астрономії тощо. Ідеєю координат користуються, записуючи розміщення фігур на шахівниці. Матеріалізованою координатною сіткою є канва для вишивання.

Терміни *абсциса* й *ордината* в їхньому сучасному розумінні ввів у кінці XVII ст. німецький учений

Г. Лейбніц (1646–1716). Щоб підкреслити рівноправність абсциси й ординати, Лейбніц застосував термін координати, що походить від латинських слів «со» — з, разом, і «ordinatus» — упорядкований, визначений. Цей термін означає «взяті в певній послідовності числа, що визначають положення точки на площині».

Слово *графік* походить від грецького — *креслю, пишу*. Подання функції за допомогою графіка допомагає наочно встановити ряд її властивостей.



Запитання для самоперевірки

1. Що таке графік функції?
2. Як побудувати графік функції, яку задано таблицею?
3. Як побудувати графік функції, заданої аналітично:
 - а) із зазначенням області визначення функції;
 - б) без додаткових зауважень щодо області визначення?



Задачі та вправи

310°. Побудуйте графік функції, заданої таблицею:

а)

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-1	0	3	5	4	3	3	2

б)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	2	3	2	1	0	1	2	3

311°. Функцію задано формулою $y = \frac{3x-2}{2}$, де x набуває цілих

значень від 0 до 8 включно. Яка область визначення цієї функції? Складіть таблицю всіх відповідних значень змінних x і y та побудуйте графік даної функції.

312°. Функцію задано формулою $y = (x-1)^2$. Областю її визначення є множина цілих чисел від -2 до 4 включно. Задайте цю функцію табличним способом і побудуйте графік.

313°. Функцію задано формулою $y = 3 - 2x$. Знайдіть координати чотирьох довільних точок її графіка.

314°. Які з точок $A(1; 2)$, $B(3; -3)$, $C(-1; 1)$, $D(5; -4)$, $E(0; 1,5)$,

$F(6; -0,75)$ належать графіку функції $y = \frac{3}{2-x}$?

315°. На рисунках 33, 34 зображено графіки деяких функцій. Користуючись ними, знайдіть:

- 1) значення y , якщо x дорівнює: а) -5 ; б) -3 ; в) 0 ; г) 2 ; р) 3 ; д) 6 ;
- 2) значення x , якщо y дорівнює: а) 1 ; б) -2 .

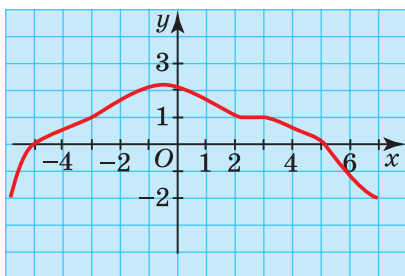


Рис. 33

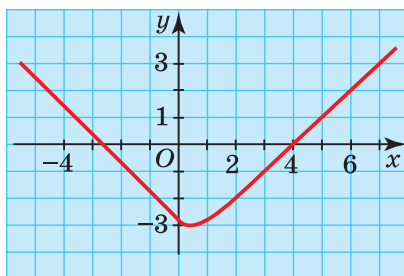


Рис. 34

316. Функції задано графічно (рис. 35, 36). Задайте їх за допомогою таблиць.

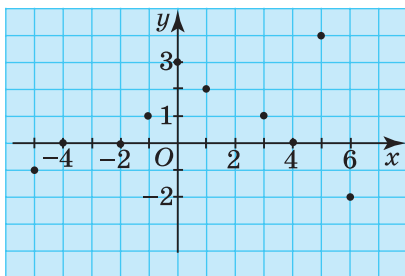


Рис. 35

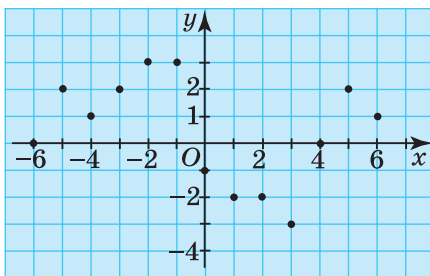


Рис. 36

317. Які із зображень, поданих на рисунках 37–40, можуть бути графіками функцій? Відповідь поясніть.

318. За графіками функцій, зображеними на рисунках 41, 42, установіть, при яких значеннях аргументу значення функції:

- а) дорівнює нулю; б) додатне; в) від'ємне.

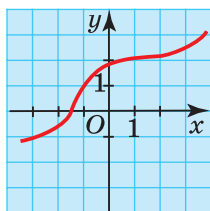


Рис. 37

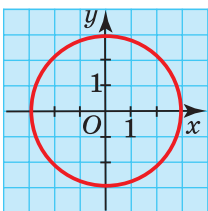


Рис. 38

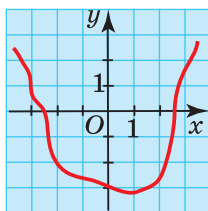


Рис. 39

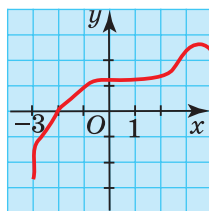


Рис. 40

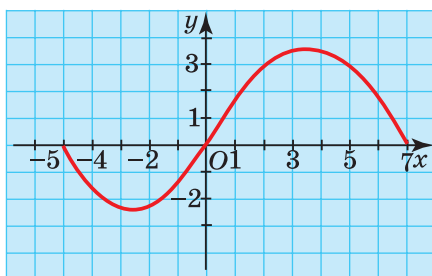


Рис. 41

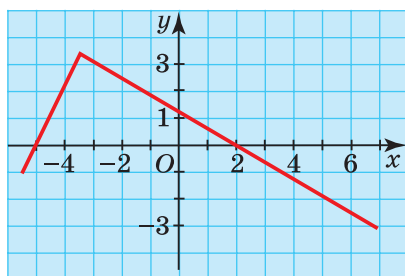


Рис. 42

319. Не будуючи графіків функцій, знайдіть координати точок їх перетину з віссю абсцис:

а) $y = 2x - 4$; б) $y = 9 + 3x$; в) $y = x^2 - 1$.

320*. Свічка завдовжки 27 см за кожну хвилину горіння стає коротшою на 0,3 см.

- Яку довжину матиме свічка через 10 хв; 30 хв; 40 хв; x хвилин?
- Виразіть за допомогою формули залежність між довжиною (y) свічки й часом (x) її горіння.
- Через скільки годин згорить свічка?



Завдання для самоперевірки

I – III рівні

1. Залежність між змінними x і y задано таблицями:

а)

x	2	4	6	-3	5	-4	0
y	4	8	10	0,8	4	-2	3

б)

x	-3	6	0	8	6	7	2
y	-4	0	2	5	0,3	8	3

Яка із цих залежностей не є функціональною? Відповідь поясніть.

2. Залежність між шляхом s км, пройденим пішоходом, що рухається зі сталою швидкістю 5 км/год, і часом t год його руху виражається формулою $s = 5t$.

а) Чи є ця залежність функціональною? Поясніть, чому.

б) Яка змінна тут є незалежною (аргументом), а яка залежною?

в) Знайдіть шлях, пройдений пішоходом за 1 год, 2 год, 3 год, 4 год, 5 год, 6 год після початку руху.

г) Складіть таблицю відповідних значень змінних t і s .

3. Функцію задано таблицею:

x	-3	-2	-1	0	2	3
y	5	0	-3	-4	0	2

а) Скільки точок утворюють графік цієї функції?

б) Позначте ці точки буквами й запишіть їхні координати.

в) Побудуйте графік цієї функції.

г) Вкажіть найбільше й найменше значення функції.

4. Функцію задано формулою $y = -x + 2$, де аргумент x набуває цілих значень від -3 до 4 включно.

а) Запишіть числа, що утворюють область визначення цієї функції.

б) Знайдіть відповідні їм значення функції та складіть таблицю відповідних значень x і y .

в) Скільки точок утворюють графік цієї функції? Позначте їх буквами і запишіть координати кожної з них.

г) Побудуйте графік даної функції.

5. На рисунку 43 зображено графік деякої функції.

а) Запишіть абсциси і ординати його точок.

б) Вкажіть область визначення і область значень функції.

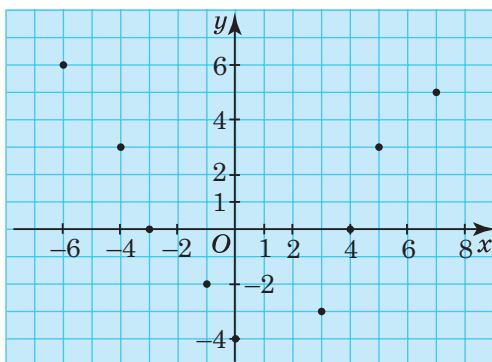


Рис. 43

6. На рисунку 44 зображено графік деякої функції. Користуючись цим графіком, знайдіть значення функції, що відповідають таким значенням аргументу:

а) $x = 0$;

б) $x = -2$;

в) $x = 3$;

г) $x = 5$.

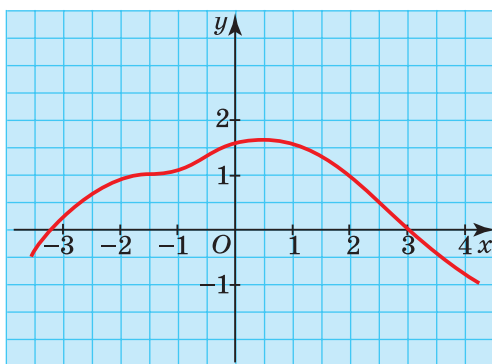


Рис. 44

III рівень

1. Яка із залежностей, заданих схематично на рисунках 45, 46, не є функціональною? Відповідь обґрунтуйте.

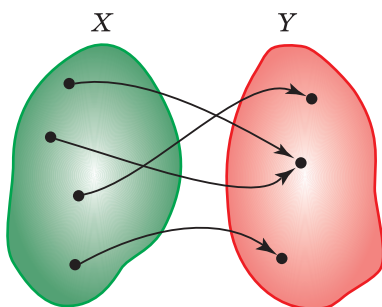


Рис. 45

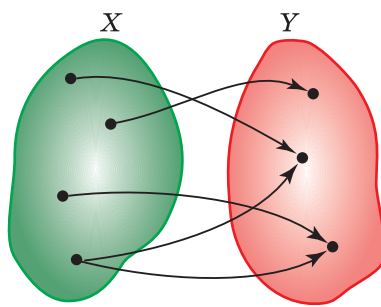


Рис. 46

2. Задайте таблицею залежність між двома змінними, яка не є функціональною.

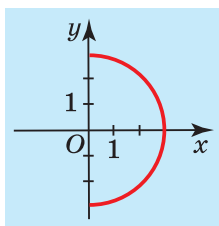


Рис. 47

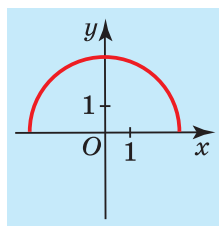


Рис. 48

- Яке з півкіл, зображених на рисунках 47, 48, може бути графіком функції, а яке — ні? Відповідь поясніть.
- Побудуйте графік функції $y = x^2 - 3x$, областю визначення якої є множина цілих чисел від -2 до 5 включно.
- Побудуйте графік функції $y = 2 - x$, визначивши координати шести його довільних точок.
- Установіть, які з точок $A(2; 7)$, $B(1; 4)$, $C(-2; 5)$, $D(3; 11)$, $E(0,5; 3,25)$, $F(0; 3)$ належать графіку функції $y = x^2 + 3$.

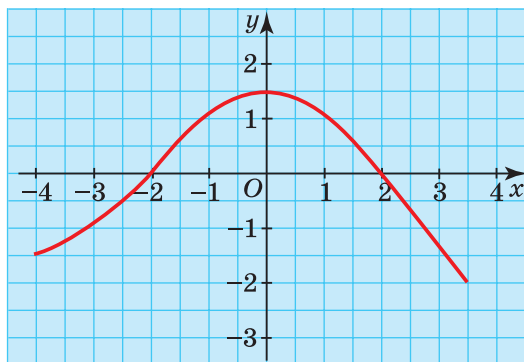


Рис. 49

7. На рисунку 49 зображено графік деякої функції. Користуючись цим графіком, знайдіть:
- значення функції для таких значень аргументу: $x = 2$, $x = -1$, $x = 3,5$;
 - значення аргументу, для яких значення функції дорівнює 0; -2 ; $1,5$.
 - область визначення функції;
 - область значень функції.

IV рівень

1. Функцію задано таблицею:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Задайте цю функцію аналітично.

- Накресліть графік залежності між змінними x і y , яка не є функціональною. Поясніть рисунок.
- Знайдіть області визначення функцій:

а) $y = \frac{1}{x-1}$;

б) $y = (x-2)(x+1)$;

в) $y = \frac{7}{x^3 - x}$;

г) $y = x(x+1)$.

4. Установіть, які з точок $A(0; 2)$, $B(-1; 4)$, $C(2; 4)$, $D(-2; 20)$, $E(-3; 10)$, $F(3; 14)$ належать графіку функції $y = 3x^2 - 5x + 2$.
5. Побудуйте вісім довільних точок графіка функції $y = |x|$, а потім і весь графік.
6. На рисунку 50 зображено графік деякої функції. Користуючись цим графіком, дайте відповіді на такі запитання:
- а) яка область визначення цієї функції;
 - б) якого найбільшого значення набуває функція;
 - в) якого найменшого значення набуває функція;
 - г) за яких значень аргументу функція досягає цих значень;
 - ґ) за яких значень аргументу значення функції дорівнюють нулю.

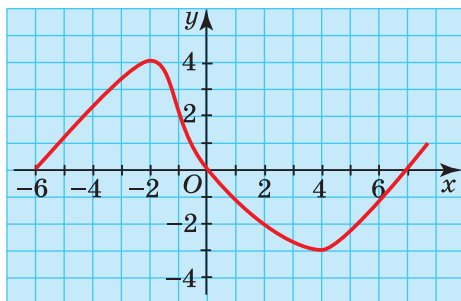


Рис. 50

7. Знайдіть область визначення і область значень функції:
- а) $y = x^2 + 4$;
 - б) $y = 4 - x^2$;
 - в) $y = x^2 - 4x + 4$.

§4.

ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

4.1. Поняття лінійної функції. Графік лінійної функції

① Що таке лінійна функція.



Функцію, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де k і b — дані числа, а x — незалежна змінна, називають *лінійною функцією*.

Наприклад: $y = 2x - 3$ (тут $k = 2$, $b = -3$); $y = -x + 2$ ($k = -1$, $b = 2$); $y = -0,7x$ ($k = -0,7$, $b = 0$). Рівність $y = 5$ теж задає лінійну функцію, бо її можна записати у вигляді $y = 0x + 5$, що відповідає формулі $y = kx + b$. Тут $k = 0$, $b = 5$.

② Як побудувати графік лінійної функції. Характерною особливістю лінійної функції є те, що її *графік* — *пряма лінія*.

Це твердження буде строго обґрунтовано у старших класах. А зараз переконаємось у цьому, побудувавши кілька точок графіка функції, наприклад, $y = 2x - 1$. Надамо незалежній змінній x послідовно значень -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 , підставимо кожне з них у формулу $y = 2x - 1$, знайдемо відповідні значення y . Результати зане-
семо до таблиці.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x - 1$	-5	-3	-1	1	3	5

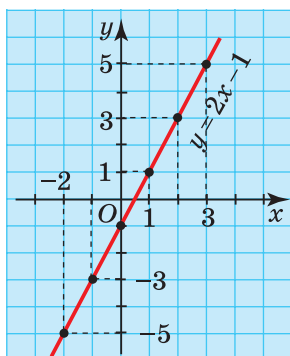


Рис. 51

Побудуємо на координатній площині точки з координатами $(-2; -5)$, $(-1; -3)$, $(0; -1)$, $(1; 1)$, $(2; 3)$, $(3; 5)$. Приклавши до них лінійку, помічаємо, що вони лежать на одній прямій (рис. 51). Точок можна побудувати безліч, бо областю визначення функції $y = 2x - 1$ є множина всіх чисел. Усі такі точки лежатимуть на тій самій прямій. Пряма, проведена через ці точки, і є графіком функції $y = 2x - 1$.

Із курсу геометрії відомо, що для побудови прямої достатньо мати лише дві її точки. Отже, для побудови графіка лінійної функції достатньо побудувати дві його точки і провести через них пряму.

Ці точки обирають довільно, але для спрощення обчислень зручно взяти точки перетину графіка з осями координат.

Приклад. Побудувати графік функції $y = 3x - 6$.

Побудова. 1) Знайдемо координати точки перетину графіка функції з віссю Ox . Оскільки всі точки, які лежать на осі Ox , мають ординату, що дорівнює нулю, підставимо у дану формулу значення $y = 0$ і знайдемо відповідне значення x . Маємо: $0 = 3x - 6$, $3x = 6$, $x = 2$. Отже, координати шуканої точки $A(2; 0)$.

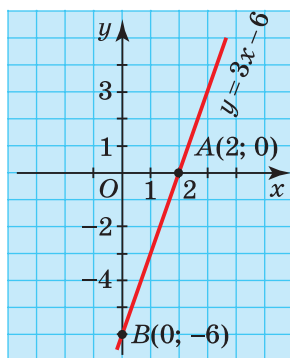


Рис. 52

2) Знайдемо тепер координати точки перетину графіка даної функції з віссю Oy . Абсциси (x) усіх точок, що лежать на осі Oy , дорівнюють нулю. Тому підставимо значення $x = 0$ у формулу $y = 3x - 6$ і знайдемо відповідне значення y . Маємо: $y = 3 \cdot 0 - 6 = -6$. Отже, координати другої точки графіка $B(0; -6)$.

3) Побудуємо на координатній площині ці точки і проведемо через них пряму, яка й буде графіком даної функції (рис. 52).

Якщо точки A і B виявляться розміщеними надто близько одна від одної, то будують ще одну точку, так звану контрольну, з довільною абсцисою, через яку проходить графік даної функції.



Запитання для самоперевірки

1. Яку функцію називають лінійною? Наведіть приклади.
2. Що є графіком лінійної функції?
3. Як побудувати графік лінійної функції?



Задачі та вправи

321°. Визначте k і b для даних лінійних функцій:

- а) $y = 2x - 4$; б) $y = -0,5x + 2$; в) $y = x - \frac{1}{2}$;
г) $y = -x + 8$; і) $y = x$; д) $y = -0,7x - 7$.

322. Доведіть, що дані функції є лінійними:

- а) $y = 2 - 3x$; б) $y = -4 - x$; в) $y = \frac{2x - 5}{4}$;
г) $y = 2$; і) $y = -x$; д) $y = \frac{1}{3}x$.

Вказівка. Запишіть формулу, що задає кожну функцію, у вигляді $y = kx + b$.

Побудуйте графіки функцій (323–325):

- 323°.** а) $y = 3x + 1$; б) $y = 2x - 2$;
в) $y = \frac{1}{2}x + 2$; г) $y = 0,3x - 1$.
324°. а) $y = -x + 3$; б) $y = -0,5x - 1$;
г) $y = -2x + 1$; і) $y = -\frac{1}{3}x + 1,5$.
325. а) $y = 2 - x$; б) $y = -x - 1$;
в) $y = 1 - \frac{1}{3}x$; г) $y = \frac{x + 4}{2}$.

- 326.** Побудуйте в одній системі координат графіки функцій і визначте координати точки їх перетину:
 а) $y = x - 1$ і $y = -x - 1$; б) $y = 2 - x$ і $y = 0,5x - 1$;
 в) $y = x + 3$ і $y = 2x + 2$; г) $y = 2x$ і $y = -x - 3$.
- 327°.** Запишіть координати точки перетину з віссю Oy графіків функцій:
 а) $y = 4x + 5$; б) $y = 0,4x - 1,5$; в) $y = 7x - 1$;
 г) $y = 4 - x$; д) $y = -3x - 7$; е) $y = -3 - 6x$.
- 328.** Знайдіть абсциси точок перетину з віссю Ox графіків функцій:
 а) $y = 2x - 6$; б) $y = 3x + 3$; в) $y = 4x - 2$; г) $y = 5x + 7$.
- 329.** Знайдіть значення b , якщо графік функції $y = 4x + b$ проходить через точку:
 а) $M(2; 1)$; б) $N(0; 6)$; в) $P(-2; 5)$; г) $R(-3; -8)$.
- 330.** Знайдіть значення k , якщо графік функції $y = kx - 1$ проходить через точку:
 а) $A(1; 3)$; б) $B(-2; 5)$; в) $C(3; 0)$; г) $D(5; 2)$.
- 331.** Графік функції $y = 2x + b$ перетинає вісь ординат у точці $(0; 5)$. Знайдіть значення b .
- 332.** Відомо, що коли $x = 4$, лінійна функція $y = 3x + b$ набуває значення, що дорівнює 11. Знайдіть b .
- 333*.** Задайте формулою лінійну функцію, графік якої перетинає осі координат у точках:
 а) $(0; 8)$ і $(7; 0)$; б) $(0; -6)$ і $(5; 0)$; в) $(0; 6)$ і $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.
- 334*.** Одна таксомоторна компанія вимагає за посадку пасажирів 2,5 грошових одиниць та за кожен кілометр проїзду 0,5 грошових одиниць. Друга таксомоторна компанія вимагає за посадку 1,5 грошових одиниць та за кожен кілометр 0,6 грошових одиниць.
 а) Запишіть функцію витрат $f(x)$, де x вимірюється у кілометрах, а $f(x)$ — у грошових одиницях для кожної компанії.
 б) Зобразіть залежності графічно.
 в) Для якого x тарифи однакові?

4.2. Окремі види лінійної функції

① **Пряма пропорційність.** Розглянемо випадок лінійної функції, коли $b = 0$. Тоді формула, що задає функцію, має вигляд $y = kx$.

Для всіх $k \neq 0$ цю функцію називають **прямою пропорційністю**, бо за будь-яких відмінних від нуля значень x і y їхнє відношення дорівнює одному й тому самому числу k :

$$\frac{y}{x} = k.$$

Оскільки **пряма пропорційність** — окремий вид лінійної функції, то її графіком є **пряма**.

Очевидно, що для будь-якого k , коли $x = 0$, значення y також дорівнює 0: $y = k \cdot 0 = 0$. Тобто, **графік прямої пропорційності проходить через точку $O(0; 0)$ — початок координат**. Тому для його побудови достатньо мати лише одну відмінну від початку координат точку. Її координати знаходять, надавши аргументу x довільного значення і обчисливши відповідне значення y .

Приклад. Побудувати графік функції $y = 3x$.

Побудова. Одна точка, через яку проходить графік функції, — початок координат. Побудуємо ще одну точку графіка. Нехай $x = 2$, тоді $y = 3 \cdot 2 = 6$. Друга точка графіка має координати $(2; 6)$. Через точки з координатами $(0; 0)$ і $(2; 6)$ проводимо пряму, яка і є графіком даної функції (рис. 53).

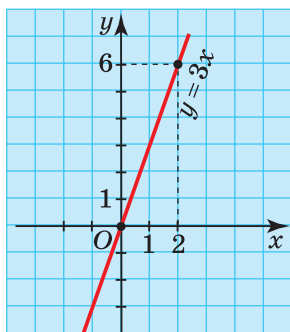


Рис. 53

З'ясуємо, як впливає значення коефіцієнта k на розміщення графіка прямої пропорційності. Зробимо це спочатку для додатного k ($k > 0$). Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{1}{4}x$, $y = x$ та $y = 3x$ (рис. 54).

Бачимо, що:

- 1) усі графіки розміщені у першій і третій координатних чвертях;
- 2) зі збільшенням коефіцієнта k збільшується кут між прямою графіка і віссю Ox (додатний напрям).

Зазначимо також, що пряма $y = x$ є бісектрисою першого і третього координатних кутів (спробуйте довести це самостійно).

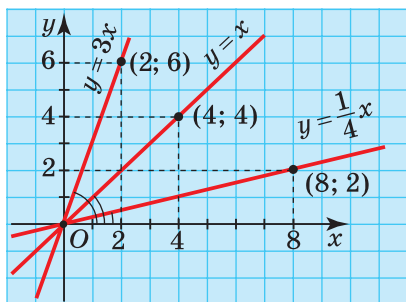


Рис. 54

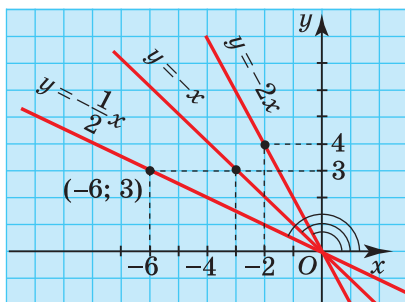


Рис. 55

Розглянемо тепер випадок, коли коефіцієнт k від'ємний ($k < 0$).

На рисунку 55 зображено графіки функцій $y = -\frac{1}{2}x$, $y = -x$, $y = -2x$.

Бачимо, що:

- 1) усі вони розміщені у другій і четвертій координатних чвертях;
- 2) зі збільшенням коефіцієнта k (наприклад, $-\frac{1}{2} > -2$) кут між прямою графіка і віссю Ox (додатний напрям) теж збільшується.

Отже, градусна міра кута між графіком і віссю Ox залежить від значення коефіцієнта k . Тому його називають **кутовим коефіцієнтом** прямої $y = kx$.

Областю визначення функції $y = kx$ є множина всіх чисел.

Якщо цю функцію розглядають у конкретній ситуації, то її область визначення може звужуватися. Наприклад, $y = 7,8x$ виражає залежність маси залізного бруска y від його об'єму x . Зрозуміло, що тут маємо справу з прямою пропорційністю, областю визначення якої є множина додатних чисел (об'єм бруска виража-

ється додатним числом). Графіком цієї функції є промінь OA без початкової точки O (рис. 56).

② Як впливає на розміщення графіка лінійної функції коефіцієнт k . Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 2x - 4$, $y = 2x$, $y = 2x + 3$ (рис. 57).

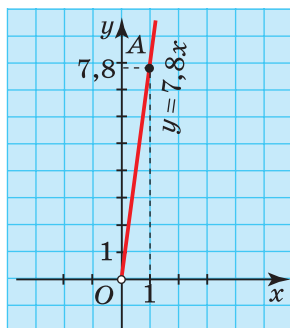


Рис. 56

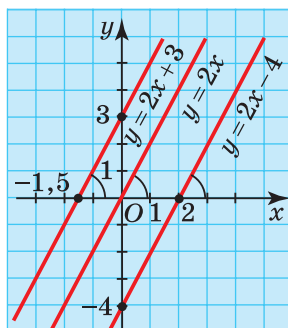


Рис. 57

Помічаємо, що всі графіки паралельні між собою. Це слід було передбачити. Адже у формулах, що задають ці функції, коефіцієнт k один і той самий і дорівнює 2. Вище було встановлено, що від кутового коефіцієнта k залежить кут між прямою $y = kx$ і віссю абсцис. Ця залежність зберігається і для лінійної функції $y = kx + b$ (прийнемо це поки що без доведення). У даному випадку, коли кутові коефіцієнти рівні між собою, то рівними будуть і позначені на рисунку кути. За відомою з курсу геометрії теоремою, доходимо висновку, що всі зображені прямі паралельні, оскільки відповідні кути рівні.

Отже, *графіки лінійних функцій з одним і тим самим кутовим коефіцієнтом паралельні між собою.*

③ Як впливає на розміщення графіка лінійної функції доданок b . Аналізуючи рисунок 57, помічаємо, що пряма $y = 2x - 4$ ($b = -4$) перетинає вісь Oy у точці з координатами $(0; -4)$; пряма $y = 2x$ ($b = 0$) — у точці з координатами $(0; 0)$; пряма $y = 2x + 3$ — у точці з координатами $(0; 3)$. Порівнюючи значення b у формулах,

які задають лінійні функції, з ординатами точок перетину їхніх графіків з віссю Oy , помічаємо, що ці ординати дорівнюють b .

Отже, пряма $y = kx + b$ перетинає вісь ординат у точці з координатами $(0; b)$.

Це неважко встановити. Оскільки абсциса будь-якої точки осі Ox дорівнює 0, то, щоб знайти ординату точки перетину графіка лінійної функції з цією віссю, потрібно у формулу, що задає функцію, замість x підставити 0 і обчислити значення y . Маємо: $y = k \cdot 0 + b$; $y = b$.

Наприклад, графіки функцій $y = 3x + 5$, $y = -x + 2$, $y = 0$, $3x - 1$ перетинають вісь Ox відповідно в точках $(0; 5)$, $(0; 2)$, $(0; -1)$.

Розглянуті властивості графіків лінійних функцій використовують для їхньої побудови.

Якщо, наприклад, маємо графік функції $y = 3x - 2$ і потрібно побудувати графік функції $y = 3x + 5$, то достатньо через точку $(0; 5)$ провести пряму, паралельну прямій $y = 3x - 2$. Поясніть самостійно, які твердження тут використовуються.

④ Інші окремі випадки лінійної функції. За означенням лінійної функції у формулі $y = kx + b$, що її задає, k і b — довільні числа, отже, вони можуть дорівнювати будь-якому числу, в тому числі й нулю.

З'ясуємо, якого вигляду набирає формула, що задає лінійну функцію, якщо k або b , або обидва ці параметри одночасно дорівнюють нулю, і яким буде відповідний графік функції.

1) $b = 0$, $k \neq 0$. Формула $y = kx$. Це — пряма пропорційність, графік якої розглянуто вище.

2) $k = 0$, $b \neq 0$. Формула $y = 0 \cdot x + b$, тобто $y = b$.

Це означає, що значення y не залежить від x і за будь-якого значення x дорівнює b . Як розміщена пряма, що є графіком такої функції? Розглянемо приклад.

Побудуємо дві довільні точки графіка $y = 0 \cdot x + 2$, тобто $y = 2$. Якщо $x = 0$, то $y = 2$; якщо $x = 3$, $y = 2$.

Через точки $A(0; 2)$ і $B(3; 2)$ проводимо пряму (рис. 58). Бачимо, що ця пряма паралельна осі абсцис. Це впливає з формули, яка задає функцію, оскільки за всіх значень змінної x значення функ-

ції дорівнює 2, тобто всі точки графіка віддалені від осі Ox на одну й ту саму відстань, яка дорівнює двом одиницям.

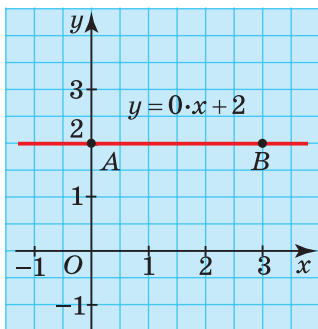


Рис. 58

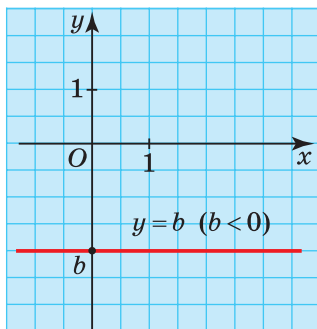


Рис. 59

Враховуючи цю властивість, для побудови графіка функції $y = b$ через точку його перетину з віссю Oy , яка має координати $(0; b)$, проводять пряму, паралельну осі Ox .

На рисунку 59 зображено графік функції $y = b$, коли b — від'ємне число.

3) $k = 0$, $b = 0$. Формула, що задає функцію, має вигляд $y = 0 \cdot x + 0$, тобто $y = 0$ за будь-якого x . Множина точок із координатами $(x; 0)$, де x — будь-яке число, утворює вісь Ox . Отже, графіком функції у цьому випадку є вісь Ox .



Запитання для самоперевірки

1. Яка функція називається лінійною?
2. У якому випадку лінійна функція називається прямою пропорційністю?
3. Як найпростіше побудувати графік прямої пропорційності?
4. Чому параметр k у формулах $y = kx$ та $y = kx + b$ називають кутовим коефіцієнтом?
5. Чим відрізняються формули, що задають лінійні функції, графіки яких паралельні прямі?



Задачі та вправи

335°. Яке твердження правильне:

- а) будь-яка пряма пропорційність є лінійною функцією;
б) будь-яка лінійна функція є прямою пропорційністю?

Побудуйте графіки функцій (336–337):

336°. а) $y = 4x$; б) $y = 3x$; в) $y = \frac{1}{3}x$; г) $y = \frac{x}{4}$.

337°. а) $y = -2x$; б) $y = -0,25x$; в) $y = \frac{1}{5}x$; г) $y = \frac{x}{2}$.

338°. Не будуючи графіка функції $y = -1,5x$, визначте, чи належать цьому графіку точки: $A(2; -3)$, $B(0; -1,5)$, $C(-1; 1,5)$,

$D(-1,5; 1)$, $E(-10; 15)$, $F(6; 9)$, $K\left(\frac{2}{3}; -1\right)$.

339°. Графік прямої пропорційності $y = kx$ проходить через точку $A(2; 4)$. Знайдіть k .

340. Задайте формулою пряму пропорційність, графік якої проходить через точку:

а) $A(2; 3)$; б) $B(-1; 5)$; в) $C(4; 4)$; г) $D(-5; 10)$.

341. Побудуйте пряму, що проходить через початок координат і точку:

а) $M(1; 3)$; б) $N(2; 5)$; в) $P(-1; -1)$; г) $Q(-4; -3)$.

Задайте формулою функцію, графіком якої є ця пряма.

342*. Задайте аналітично функції, графіки яких зображено на рисунку 60.

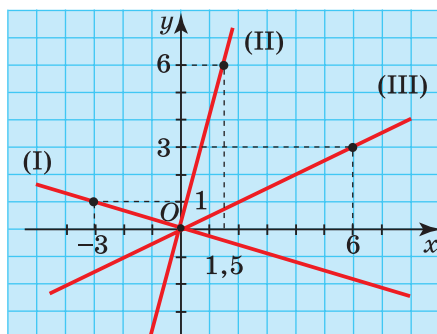


Рис. 60

- 343.** Побудуйте графік функції $y = -1,5x - 3$. Використовуючи побудовану пряму, побудуйте в цій самій системі координат графіки функцій $y = -1,5x$; $y = -1,5x + 3$; $y = -1,5x - 1$.
- 344.** Знайдіть і запишіть формули, що задають функції, графіки яких паралельні:
- а) $y = -x + 2$; б) $y = 1,5x + 4$; в) $y = 5x$; г) $y = -x - 4$;
 ґ) $y = 5 + 1,5x$; д) $y = 4 - 8,5x$; е) $y = 4x - 2$; є) $y = 5x - 6$;
 ж) $y = 1,5 + 4x$; з) $y = 1,5$.
- 345.** Задайте три лінійні функції, графіки яких паралельні графіку функції $y = 1,6x - 1,5$.
- 346*.** Задайте формулами лінійні функції, графіки яких паралельні графіку функції $y = -2x$ і перетинають вісь ординат у точках:
- а) $A(0; 3)$; б) $B(0; -2)$; в) $C(0; 6,5)$; г) $D(0; -10)$.
- 347*.** Задайте формулою лінійну функцію, графік якої перетинає осі координат у точках:
- а) $M(0; 1,5)$ і $N(-4; 0)$; б) $P(0; -8)$ і $Q(5; 0)$;
 в) $R\left(0; \frac{1}{3}\right)$ і $S(2; 0)$; г) $K(0; -4,5)$ і $L(-3; 0)$.
- 348*.** На рисунку 61 в одній системі координат побудовано графіки чотирьох лінійних функцій. Задайте кожен із цих функцій аналітично.

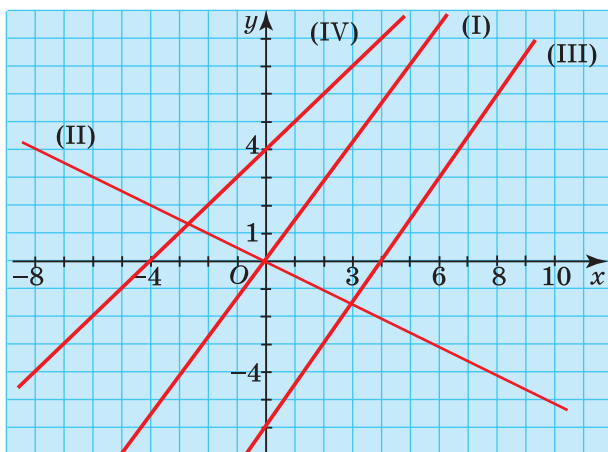


Рис. 61

349*. Графік функції $y = kx + b$ проходить через точки $M(2; 3)$ і $N(-5; -4)$. Знайдіть значення k і b та побудуйте графік функції.

350. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x$ та $y = -x$. Використавши ці графіки та означення модуля числа, побудуйте графік функції $y = |x|$.

351. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = 2|x|$; б) $y = -2|x|$; в) $y = |x - 3|$; г) $y = |x + 1|$.

352*. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

а) $y = x$, якщо $0 \leq x \leq 2$, і $y = -x$, якщо $-2 \leq x \leq 0$;

$y = 4 - x$, якщо $0 < x < 2$, і $y = 4 + x$, якщо $-2 \leq x \leq 0$;

б) $y = |x|$, якщо $-2 \leq x \leq 2$, і $y = 4 - |x|$, якщо $|x| \leq 2$;

в) $y = 1 + 0,5|x|$, якщо $|x| \leq 4$ і $y = 5 - 0,5|x|$, якщо $|x| \leq 4$.



Завдання для самоперевірки

I-II рівні

1. Запишіть формули, що задають лінійні функції, у вигляді $y = kx + b$ і визначте у кожному випадку значення k і b :

а) $y = 5x - 4$;

б) $y = 2 + 3x$;

в) $y = -7 + 0,5x$;

г) $y = 5 + x$;

д) $y = 3x$;

е) $y = x$.

2. Від чого залежить кут нахилу прямої $y = kx + b$ до осі Ox ?

3. Знайдіть і запишіть формули, що задають функції, графіки яких паралельні:

а) $y = 2x - 3$;

б) $y = 4 + 3x$;

в) $y = 2x + 5$;

г) $y = 0,5x$;

д) $y = 3x - 2$;

е) $y = 1 + 0,5x$;

ж) $y = 3x - 1$;

з) $y = 5x - 7$.

4. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої паралельний графіку функцій:

а) $y = 0,5x - 3$;

б) $y = -2x + 4,5$;

в) $y = -0,5x + 4$;

г) $y = 2x - 4$.

Скільки таких функцій у кожному випадку можна задати?

5. Побудуйте графіки функцій:
а) $y = 0,4x$; б) $y = -x$; в) $y = 2x - 4$; г) $y = -2x + 2$.
6. Знайдіть координати точок перетину з осями координат графіків функцій, не будуючи цих графіків:
а) $y = x + 4$; б) $y = 3x + 12$; в) $y = -4x + 8$; г) $y = 5x$.

III рівень

1. Побудуйте графік функції $y = 0,4x - 2$. Задайте формулою пряму пропорційність, графік якої паралельний графіку даної функції.
2. Графік лінійної функції $y = ax + 2$ проходить через точку $(-4; -1)$. Знайдіть a .
3. Побудуйте графік лінійної функції, що перетинає вісь абсцис у точці $B(2; 0)$ і паралельний графіку функції $y = -2x$. Задайте цю функцію формулою.
4. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої перетинає вісь ординат у точці $(0; 5)$ і паралельний графіку функції $y = -3x - 1$.
5. Як розміщена відносно осей координат пряма $y = 2 + 0 \cdot x$?
6. Задайте аналітично лінійну функцію, графік якої проходить через точку $(2; 5)$ і паралельний осі Ox .

IV рівень

1. Дано лінійну функцію $y = kx + b$. За яких k і b її графік:
а) проходить через початок координат;
б) проходить через початок координат і точку $M(-1; 3)$;
в) паралельний графіку функції $y = 3x - 5$ і проходить через точку $A(2; 2)$;
г) не проходить через точки, координати яких мають однакові знаки;
г) є бісектрисою координатних кутів другої і четвертої чвертей;
д) відтинає на осях координат рівні відрізки?
2. Ордината усіх точок графіка функції $y = kx + b$ дорівнює 2. Знайдіть k і b .

3. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = -4|x|$;

б) $y = |2x + 1|$;

в) $y = 3|x| - 1$;

г) $y = |x + 1| - 1$.



Здійснюємо самооцінку навчальних досягнень

У результаті засвоєння матеріалу цього розділу ви маєте

знати:

- що таке функція;
- що таке аргумент;
- що таке область визначення і область значень функції;
- що таке графік функції;
- яку функцію називають лінійною, що є її графіком;
- що таке пряма пропорційність;

розуміти і вміти пояснити:

— що означає «задати функцію» і якими способами це можна зробити;

— як будують графік функції, заданої: а) аналітично; б) таблицею;

— як за графіком функції знайти значення однієї змінної за даним значенням іншої змінної;

— як побудувати графік: а) лінійної функції; б) прямої пропорційності;

— як впливає значення коефіцієнта k на розміщення графіка лінійної функції $y = kx + b$ (прямої пропорційності $y = kx$);

— у якому випадку графіки двох лінійних функцій є паралельними прямими;

— як впливає на розміщення графіка лінійної функції значення доданка b ;

успішно розв'язувати задачі і вправи, подібні до вміщених у цьому розділі.